Dicas Lista 4
Macroeconomia I

Yuri Passuelo – yuripassuelo@usp.br

16 de maio de 2025

Instruções e Dicas para a resolução da quarta lista da disciplinas de Macroeconomia I.

Problem 1

(a)

Para montar o problema recursivo do consumidor vamos primeiro usar a função utilidade em seu formato genérico $u(c_t)$, indo no mesmo passo a passo que ja sabemos, abrindo o somatorio, deixando o periodo zero e compactando o somatorio a partir do período 1, simplificando o somatório a partir de $t = 1$ de modo que fique parecido com o problema sequêncial distribuindo os máximos e etc...

(b)

Para encontrar a equação de Euler associada precisamos diferenciar nosso problema recursivo em relação a a'. Não esqueça de:

- Substituir c dentro da função utilidade pela restrição orçamentária:

$$c \leq y + (1 + r)a - a'$$

- Quando for diferenciar $V(a')$ em relação à a' invocar o teorema de Benveniste Sheickman

- Descreva a interpretação dessa equação de euler, em termos de como a utilidade marginal do presente se relaciona com o futuro.

(c) e (d)

Lembre-se da relação que descrevemos anteriormente entre utilidade do consumo presente e futuro, como a mudança da taxa de juros r_{t+1} afeta essa relação?

$$\beta(1+r)u'(c') = u'(c) \implies \frac{1+r}{1+r}u'(c') = u'(c)$$

Logo

$$u'(c') = u'(c)$$

Como temos que $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ então $u'(c) = c^{-\sigma}$ portanto:

$$c'^{-\sigma} = c^{-\sigma}$$

(e)

Aqui temos que simplesmente enunciar os passos de um algoritmo que compute o equilibrio para esse problema, podemos simplesmente pegar o algoritmo que vimos na lista 2 e adapta-lo.

Por exemplo: La havia produção e aqui não, so temos um ativo que carregamos ao longo do tempo e que é remunerado por r_{t+1} portanto não precisamos poupar para produzir e depois consumir, so alocamos consumo e investimento dado $a(1+r')$, porém os demais passos continuam os mesmos.

Problem 2

Considere uma ilha (economia) com uma única arvore de Lucas.

- Os frutos (chamados de dividendos pelos habitantes da ilha) que crescem na arvore são a única fonte de consumo.
- Esses frutos seguem o seguinte processo estocástico:
  - $d_{t+1} = \gamma d_t$ com probabilidade π ou $d_{t+1} = d_t$ (com probabilidade $(1-\pi)$).
  - se em um dado período T temos que $d_T = d_{T-1}$ então para todo $t > T$ vale que $d_t = d_T$.

Existe uma massa unitária de pessoas iguais nessa ilha com preferências sobre um fluxo de consumo dadas por:

$$U = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t),$$

em que $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$. Suponha que $\sigma > 0$, $\sigma \neq 1$, $0 < \beta < 1$, $\gamma > 1$ e que $\beta\gamma^{(1-\sigma)} < 1$.

(a) Escreva o problema recursivo de um agente representativo.

(b) Defina um equilíbrio competitivo recursivo para essa economia.

(c) Encontre a condição de primeira ordem do problema do agente representativo e, utilizando a condição de equilíbrio, escreva a equação a apreçamento do ativo.

(d) Escreva os preços de equilíbrio como uma função dos dividendos.

(e) Seja T o primeiro per ıodo tal que $d_{T-1} = d_T$. Vale que $p_{T-1} > p_T$? Encontre condições para que isto seja verdade. Interprete os resultados.

Solution

(a)

Aqui precisamos adaptar o que já conhecemos e adaptar o que conhecemos para o caso de uma economia "Normal"para o caso de uma economia das ilhas de Lucas.

A grande diferença aqui é que em cada período individuo tem que alocar sua renda y em consumo c e investimento em um titulo s, titulo custa p mas gera dividendos d. Quando individuo compra esse titulo s em t ele gerara um dividendo d no próximo período, e depois caso individuo deseje, devera comprar novamente o titulo s.

Relembrando alguns conceitos:

- Arvore denominada s_t, que gera frutos, que podem ser denominados x_t ou d_t;
- Arvore é particionada entre os indivíduos, e tem preço p_t.
- Variáveis de estado e controle são:
  - Controle: c_t, s_{t+1};
  - Estado: s_t e d_t ou x_t
- Preço da arvore p é função do valor dos dividendos d

A restrição orçamentária do problema é dada por:

$$p_t s_{t+1} + c_t = (p_t + d_t)s_t$$

Para resolver o problema primeiro devemos colocar num formato recursivo o formato sequencial que nos foi apresentado.

Do lado esquerdo da equação temos os gastos e receitas ou as posses de ativos, ou seja, no presente o individuo possui como ativos, a arvore precificada em p_t e os frutos/dividendos d_t gerados, e sua alocação se dá na decisão entre consumir c_t mas ao mesmo tempo se preocupar com o fato de comprar a arvore para o próximo período $(t + 1)$.

(b)

Para a definição de um equilíbrio competitivo recursivo vamos usar Junior (2025) Modelos com Incerteza Parte 2 *pg.2*

(c)

Aqui precisamos retirar as condições de primeira ordem relacionada ao problema do agente representativo, como temos duas variáveis de controle, usamos apenas a C.P.O em relação ao nosso problema modificado é s'.

(d)

A partir da C.P.O relativa à s', primeiro tentaremos isolar $p(d)$, depois devemos trabalhar as esperanças, e aproveitar o formato recursivo que $p(d)$ apresenta, a partir disso usamos os limites como mostrados em Junior (2025)Modelos com incerteza Parte 2pg.4 e por fim teremos uma expressão final para $p(d)$

(e)

Para achar a condição pegamos o preço em função dos dividendos que encontramos no item (d) e aplicamos a esperança, lembre-se que como d é um processo markoviano tem probabilidade $1-\pi$ de $d' = \gamma d$ e π com $d' = d$, portanto podemos abri-la em:

$$E[x] = (1-\pi)\gamma x + \pi x$$

Problem 3

Solution

```
import numpy as np

# Exercic o 3

# Matriz do Processo de Markov
M = np.matrix( [[0.20, 0.30, 0.40, 0.10],
                 [0.10, 0.10, 0.70, 0.10],
                 [0.95, 0.024, 0.025, 0.001],
                 [0.25, 0.25, 0.25, 0.25]])

# Distribui  o Inicial
p0 = np.array([ 0.25, 0.25, 0.25, 0.25 ])

# Toler ncia
tol = 10e-7

# Iteracao
p  = p0
q  = p0*M
k = 1

dist = np.sum( np.square(p-q) )

while dist > tol:
    # Atualiza vetores
    p = q
    q = q * M
    # Calcula distancia
    dist = np.sum( np.square(p-q))
    k = k + 1

print(k)
```

Pelo procedimento adotado acima chegaremos em um valor de $k = 7$ e a distribuição invariante de:

$$\begin{pmatrix} 0.42690625 & 0.17294405 & 0.31978859 & 0.08036111 \end{pmatrix}$$

A distribuição invariante é única.

Problem 4

(a)

O problema acima se trata de uma versão mais complexa dos modelos neoclássicos até então vistos, note que temos duas ”complexidades”a mais no modelo

- A primeira se trata da inclusão do trabalho, aqui temos a inclusão de uma variável a mais de controle, agora o individuo escolhe o quanto de k' e l, ou seja, quando de capital e trabalho serão alocados.
- A segunda se trata da inclusão de um componente estocástico, ou seja, nossa função de produção $f(k_t, l_t)$ sofre choques dados por z_t que sofrem um processo markoviano.

Construa o problema recursivo da mesma forma que fizemos anteriormente.

(b)

Vamos agora as condições de otimalidade do problema, vamos relembra-las:

1. Condição de Primeira ordem relacionada ao capital k'
2. Condição de Primeira ordem relacionada ao trabalho l
3. Lembre-se de sempre invocar o teorema de Benveniste-Scheikman para diferenciar a função valor

(c)

Dada a parametrização para resolver o problema, antes disso vamos so esclarecer uma coisa que pode ficar confusa:

- Aqui assumimos que existe uma média de produtividade $\bar{z}$ de *steady state*, então temos que supor que após a parametrização $z = \bar{z}$
- Aqui vamos resolver o problema de forma similar ao que fizemos na questão 2 da lista 2

Para resolver vamos seguir o seguinte passo-a-passo:

1. Substituir as equações de $u(.)$ e $F(.)$ nas equações de Euler
2. Dada a equação de Euler em relação ao trabalho substituir:

$$zk^{\alpha}l^{1-\alpha} + (1-\delta)k - k' = c$$

$$z(k/l)^\alpha = z\frac{k^\alpha l^{1-\alpha}}{l} = z\frac{y}{l}$$

e Isolar l

3. Substituir k, k', k'' por k^*, c, c' por c^* e y, y' por y^*
4. Encontrar as razões k^*/l^*, y^*/l^*, k^*/y^* e c^*/y^*

(d)

Codigo divulgado no site, abaixo os gráficos de função valor e politicas.

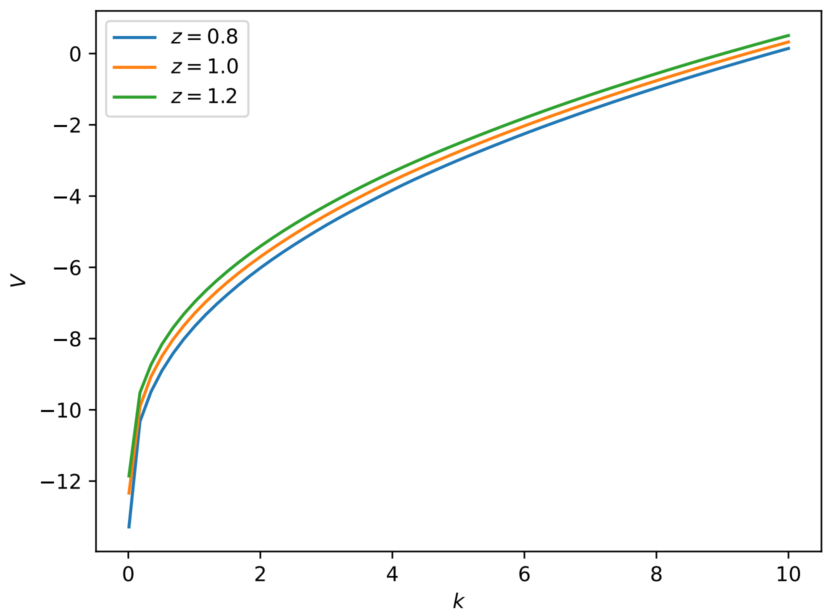

Figura 1: Função Valor para diferentes z

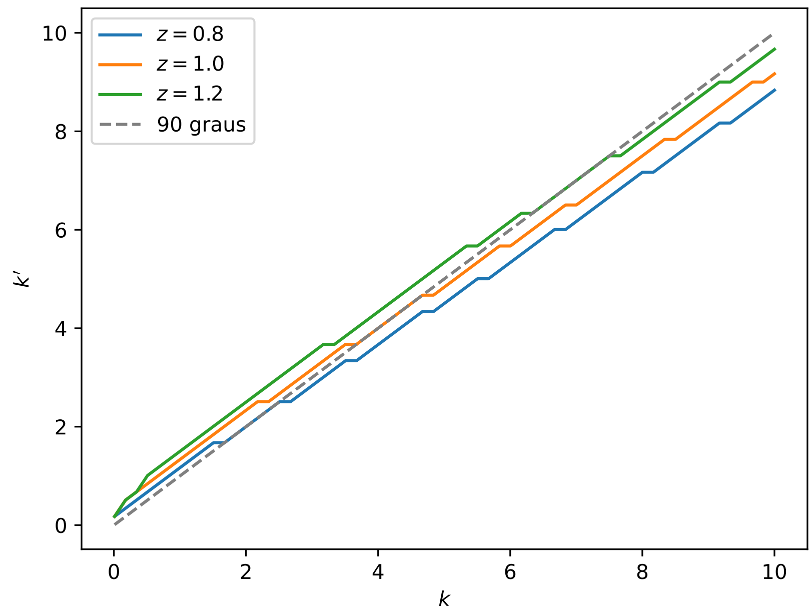

Figura 2: Função Politica de k' para diferentes z

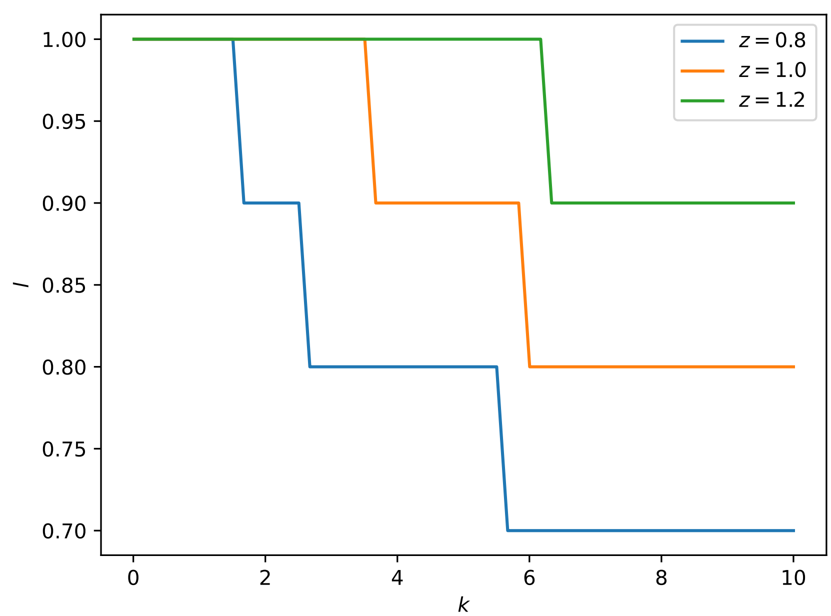

Figura 3: Função Politica de l para diferentes z

É possível identificar que para quanto maior o nível de choque de produtividade z temos que há um valor maior associado, ou seja a utilidade aumenta, uma vez que a produtividade para mesmo níveis de capital é maior o que permite maior consumo e poupança.

Pela função politica do capital vemos que a curva se torna menor horizontal indicando que há um nível de aplicação maior do capital quanto maior o choque de produtividade z, vemos que para a função política do trabalho temos um nível maior de utilização do trabalho, ou seja a utilidade do consumo gerada pelo choque de produtividade compensa a desutilidade do trabalho.

Por último na tabela abaixo temos os valores de capital de *steady state* para os diferentes níveis de choque de produtividade, com respectivo consumo e também respectiva utilização da força de trabalho.

z	k^*	c^*	l^*
0.8	1.675	0.784	0.9
1	3.673	1.189	0.9
1.2	6.337	1.623	0.9

Problem 5

Duvidas na Monitoria

Referências

Junior, F. A. B. (2025). *Notas de Aula*. FEARP/USP. (Ver p. 4).