Problemas Controle ótimo
Macroeconomia I

Yuri Passuelo – yuripassuelo@usp.br

17 de julho de 2025

Exercicío Exemplo

Problema de consumo e poupança clássico, essencialmente nosso objetivo é encontrar as trajetórias ótimos de consumo e capital de um agente que tem como funcional

$$V[C] = \int_0^T e^{-\rho t} U[C(t)] dt$$

Sujeito à:

$$\dot{K(t)} = \alpha K(t) - C(t)$$

E condições de contorno:

$$K(0) = K_0$$

$$K(T) \geq 0$$

Aqui vamos a parametrização da função utilidade:

$$U[C(t)] = \log{(C(t))}$$

Fica claro pelo caracterização do problema que:

- Nossa variável de controle aqui é $C(t)$
- Nossa variável de Estado aqui é $K(t)$

Aqui vamos portanto resolver o problema, começaremos primeiramente montando a Hamiltoniana:

$$H = e^{-\rho t}\log(C(t)) + \lambda(t)[\alpha K(t) - C(t)]$$

Agora vamos as condições de primeira ordem e as equações de movimento:

$$\frac{\partial H}{\partial C(t)} = \frac{e^{-\rho t}}{C(t)} - \lambda(t) = 0 \implies \lambda(t) = \frac{1}{e^{\rho t}C(t)}$$

$$\dot{\lambda(t)} = -\frac{\partial H}{\partial K(t)} = -\alpha\lambda(t)$$

Pegando a segunda equação e resolvendo a equação diferencial teremos:

$$\lambda(t) = A_1 e^{-\alpha t}$$

Aqui portanto teremos que o consumo será:

$$A_1 e^{-\alpha t} = \frac{1}{e^{\rho t}C(t)} \implies C(t) = \frac{1}{A_1}e^{(\alpha-\rho)t}$$

Descobrimos aqui as trajetórias ótimas tanto de $\lambda(t)$ quanto $C(t)$, nos resta encontrar $K(t)$, para determinar a trajetória ótima de $K(t)$ vamos utilizar a equação de movimento de $K(t)$, assim dado a equação de movimento:

$$\dot{K(t)} = \alpha K(t) - C(t)$$

Substituindo o $C(t)$

$$\dot{K(t)} = \alpha K(t) - \frac{1}{A_1}e^{(\alpha-\rho)t}$$

Aqui temos uma equação diferencial ordinária, porém com um caso particular, para resolve-la vamos quebrar em duas partes, a primeira resolvendo somente a parte homogênea (sem considerar a parte particular):

$$\dot{K(t)} = \alpha K(t) \implies K_h(t) = A_2 e^{\alpha t}$$

Agora vamos a solução particular do nosso problema, aqui temos que o que nos resta é o componente:

$$\frac{1}{A_1}e^{(\alpha-\rho)t}$$

Aqui vamos supor que $K_p(t) = Be^{\gamma t}$, e a partir disso teremos que:

$$\dot{K(t)} = \gamma B e^{\gamma t}$$

$$\alpha K(t) = \alpha B e^{\gamma t}$$

Dessa forma teremos que:

$$\dot{K(t)} - \alpha K(t) = -\frac{1}{A_1} e^{(\alpha-\rho)t}$$

Substituindo $\dot{K(t)}$ e $K(t)$

$$\gamma B e^{\gamma t} - \alpha B e^{\gamma t} = -\frac{1}{A_1} e^{(\alpha-\rho)t}$$

$$(\gamma - \alpha) B e^{\gamma t} = -\frac{1}{A_1} e^{(\alpha-\rho)t}$$

Portanto teremos um sistema tal que:

$$\gamma = \alpha - \rho$$

$$(\gamma - \alpha) B = -\frac{1}{A_1}$$

Portanto teremos que:

$$B = \frac{1}{A_1 \rho}$$

Logo teremos que:

$$K(t) = A_2 e^{\alpha t} + \frac{1}{A_1 \rho} e^{(\alpha-\rho)t}$$

$$C(t) = \frac{1}{A_1} e^{(\alpha-\rho)t}$$

$$\lambda(t) = A_1 e^{-\alpha t}$$

Vamos usar portanto as condições de contorno do capital $K(0) = K_0$ e a condição de transversalidade para encontrar as incognitas A_1 e A_2.

$$K(0) = A_2 + \frac{1}{A_1 \rho} = K_0 \implies A_2 = K_0 - \frac{1}{A_1 \rho}$$

Portanto:

$$K(t) = \left[K_0 - \frac{1}{A_1 \rho}\right] e^{\alpha t} + \frac{1}{A_1 \rho} e^{(\alpha-\rho)t}$$

Nossa condição de transversalidade para o caso de uma linha terminal vertical truncada é:

$$\lambda(T)[K(T) - 0] = \lambda(T)K(T) = 0$$

Substituindo $\lambda(T)$ e $K(T)$ teremos:

$$A_1 e^{-\alpha T}\left[\left[K_0 - \frac{1}{A_1\rho}\right]e^{\alpha T} + \frac{1}{A_1\rho}e^{(\alpha-\rho)T}\right] = 0$$

$$A_1 e^{-\alpha T}\left[K_0 - \frac{1}{A_1\rho}\right]e^{\alpha T} + A_1 e^{-\alpha T}\frac{1}{A_1\rho}e^{(\alpha-\rho)T} = 0$$

$$A_1 K_0 - \frac{1}{\rho} + \frac{e^{-\rho T}}{\rho} = 0$$

Isolando A_1

$$A_1 = \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho K_0}$$

Encontrado a constante A_1 substituiremos nas trajetórias ótimas encontradas

$$\lambda(t) = \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho K_0}e^{-\alpha t}$$

$$C(t) = \frac{\rho K_0}{1 - e^{-\rho T}}e^{(\alpha-\rho)t}$$

$$K(t) = -\frac{e^{-\rho T}K_0}{1 - e^{-\rho T}}e^{\alpha t} + \frac{K_0}{1 - e^{-\rho T}}e^{(\alpha-\rho)t}$$