Problemas Calculo de variações
Macroeconomia I

Yuri Passuelo – yuripassuelo@usp.br

9 de junho de 2025

Resolução dos exercícios 2.4 e 2.5 do Elements of Dynamic Optimization do Chiang.

Otimização Dinâmica do Monopolista

Aqui estamos nos tratando de um problema simples que se trata do problema de um monopolista, que produz um unico bem, bem esse que tem uma estrutura de custos quadrática para a firma:

$$C(Q) = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma \ ; \ \alpha, \beta, \gamma > 0 \tag{1}$$

O perfil de demanda que o Monopolista enfrenta segue a seguinte função:

$$Q = a - bP(t) + hP'(t) \ ; \ a, b > 0 \ ; \ h \neq 0 \tag{2}$$

O lucro da firma é dado pela função:

$$\pi(t) = P(t)Q(t) - C(Q(t)) \tag{3}$$

Substituindo Q temos:

$$\pi = P(t)(a - bP(t) + hP'(t)) - \alpha(a - bP(t) + hP'(t))^2 - \beta(a - bP(t) + hP'(t)) - \gamma \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &= aP(t) - bP(t)^2 + hP'(t) - \alpha(a^2 - 2abP(t) + 2ahP'(t) - 2bhP(t)P'(t) + \\ &\qquad b^2P(t)^2 + h^2P'(t)^2) - \beta a + \beta bP(t) - \beta hP'(t) - \gamma \end{aligned} \tag{5}$$

Simplificando as equações:

$$\begin{aligned} \pi(P, P') = P(t)\big[a + 2\alpha ab - \beta\big] - P(t)^2\big[b + \alpha b^2\big] + P'(t)\big[\beta h - 2\alpha ah\big] \\ -P'(t)^2\big[\alpha h^2\big] + P(t)P'(t)[h + 2\alpha bh] - \big[\alpha a^2 - \beta a + \gamma\big] \end{aligned} \tag{6}$$

Dada nossa função Lucro, podemos construir nosso problema de calculo de variações, primeiro definindo nossa funcional:

$$V(\pi) = \int_0^T \pi(P, P')dt \tag{7}$$

E agora nosso problema:

$$\max V(\pi)$$

Sujeito à:

$$\begin{aligned} P(0) &= P_0 \\ P(T) &= P_T \end{aligned} \tag{8}$$

Objetivo aqui é maximizar o fluxo de lucros da empresa dado os pontos iniciais e terminais, aqui a lógica pode ser um pouco confuso, uma vez que a firma tem um objetivo de alterar preços entre $t = 0$ e $t = T$, e portanto devemos encontrar a função $P(t)$ que maximiza a trajetória de lucros nessa transição.

Se pensarmos em um cenário real, o que talvez se assemelharia a um problema de otimização do monopolista seria a firma monopolista a partir de um preço inicial dado $P(0) = P_0$ achar a função de preço tal que maximize o lucro num cenário de horizonte infinito (aqui a firma não tem um ponto terminal, dado as características de mercado deveria maximizar o fluxo infinito de lucros) ou de uma linha terminal vertical (deve terminar em um preço $P(T) > 0$ tal que maximize o lucro em todo período).

Dada a descrição do problema vamos construir nossa equação de Euler:

$$\pi_P - \pi_{tP'} - \pi_{PP'}P'(t) - \pi_{P'P'}P''(t) = 0 \tag{9}$$

Valorando cada elemento da nossa equação de Euler teremos:

$$\begin{aligned} \pi_P = a + 2\alpha ab - \beta - 2P(t)(b + \alpha b^2) + P'(t)(h + 2\alpha bh) \\ \pi_{P'} = \beta h - 2\alpha ah - 2P'(t)\alpha h^2 + P(t)(h + 2\alpha bh) \\ \pi_{PP'} = h + 2\alpha bh \\ \pi_{P'P'} = -2\alpha ah^2 \\ \pi_{tP'} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Juntando os elementos:

$$\begin{aligned} a + 2\alpha ab - \beta - 2P(t)(b + \alpha b^2) + P'(t)(h + 2\alpha bh) \\ -(h + 2\alpha bh)P'(t) + 2\alpha ah^2 P''(t) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Simplificando e reordenando chegamos numa E.D.O de segundo grau:

$$(a + 2a\alpha b - \beta) - P(t)2(b + \alpha b^2) + P''(t)(2\alpha h^2) = 0 \tag{12}$$

Vamos resolver essa E.D.O, primeiramente pela parte homogênea, aqui o procedimento é, chutar a equação característica, encontrar a formulação geral da função, depois encontrar a solução particular.

$$P(t) = e^{rt} \ ; \ P'(t) = re^{rt} \ ; \ P''(t) = r^2 e^{rt} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} r^2 e^{rt}(2\alpha h^2) - e^{rt}2(b + \alpha b^2) &= 0 \\ 2e^{rt}(r^2(\alpha h^2) - (b + \alpha b^2)) &= 0 \\ r &= \pm\sqrt{\frac{b + \alpha b^2}{\alpha h^2}} \end{aligned} \tag{14}$$

Portanto temos como solução característica:

$$P_h(t) = A_1 e^{rt} + A_2 e^{-rt} \tag{15}$$

Vamos agora a equação particular, como temos que nossa equação possui uma constante, chutaremos que $P_p(t) = B \implies P_p'(t) = P_p''(t) = 0$, logo:

$$P_p(t) = \frac{a + 2a\alpha b - \beta}{2(b + \alpha b^2)} = \bar{P} \tag{16}$$

Portanto temos que nossa solução geral é:

$$P(t) = A_1 e^{rt} + A_2 e^{-rt} + \bar{P} \tag{17}$$

Dadas as condições iniciais:

$$\begin{aligned} P(0) &= P_0 \\ P(T) &= P_T \end{aligned} \tag{18}$$

Chegamos a um sistema de equações para que possamos encontrar A_1 e A_2:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \bar{P} &= P_0 \\ A_1 e^{rt} + A_2 e^{-rt} + \bar{P} &= P_T \end{aligned} \tag{19}$$

Portanto temos

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(P_0 - P_T) - (P_T - \bar{P})e^{rT}}{1 - e^{2rT}} \\ A_2 &= \frac{(P_0 - P_T) - (P_T - \bar{P})e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}} \end{aligned} \tag{20}$$

Com:

$$
\begin{aligned}
r &= \pm\sqrt{\frac{b+\alpha b^2}{\alpha h^2}} \\
\bar{P} &= \frac{a+2a\alpha b-\beta}{2(b+\alpha b^2)}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Questões

1

Caso tenhamos uma alteração na função de demanda tal que $h=0$ e portanto nossa função demanda é:

$$Q = a - bP(t)$$

Qual será a nova solução? Vamos primeiro calcular nossa nova função lucro:

$$
\begin{aligned}
\pi(P,P') &= P(t)(a-bP(t)) - \alpha(a-bP(t))^2 - \beta(a-bP(t)) - \gamma \\
&= aP(t) - bP(t)^2 - \alpha(a^2 - 2abP(t) + b^2P(t)^2) - \beta a + \beta bP(t) - \gamma \\
&= P(t)(a - 2ab + \alpha(a^2\beta b))P(t) - P(t)^2(b+\alpha b^2) - (\alpha a^2 + \beta a - \gamma)
\end{aligned}
$$

Assim temos nossa função Lucro que é:

$$\pi(P,P') = P(t)(a - 2ab + \alpha(a^2\beta b))P(t) - P(t)^2(b+\alpha b^2) - (\alpha a^2 + \beta a - \gamma)$$

Montando o nosso problema de otimização:

$$V(\pi) = \int_0^T \pi(P,P')dt$$

Queremos:

$$\max V(\pi)$$

Sujeito à:

$$
\begin{aligned}
P(0) &= P_0 \\
P(0) &= P_T
\end{aligned}
$$

Vamos resolver usando nossa C.P.O:

$$\pi_P - \pi_{tP'} - \pi_{PP'}P'(t) - \pi_{P'P'}P''(t) = 0$$

Calculando os componentes da eq. de Euler teremos:

$$\pi_P = (a - \beta b + 2\alpha ab) - 2P(t)(b+\alpha b^2)$$

$$\pi_{P'} = 0$$

$$\pi_{P'P} = 0$$

$$\pi_{P'P'} = 0$$

$$\pi_{tP'} = 0$$

Aqui não teremos uma equação diferencial, e sim um preço constante:

$$P(t) = \frac{a - \beta b + 2\alpha ab}{2(b + \alpha b^2)}$$

2

Verificado no passo a passo.

3

Mostrar que reversão no preço $P(t)$ ocorre sómente se $A_1e^{rt} = A_2e^{-rt}$.

Porque isso ocorreria? Supondo que por exemplo nossa trajetória tenha uma reversão, ou seja comece em uma direção, por exemplo aumento de preço e algum momento $t_0 \in [0, T]$, tenha uma reversão e comece a cair, para que essa reversão ocorra, assumindo que nossa funcional F é diferenciável e integrável, então temos que:

$$\exists t_0 \in [0, T](\frac{\partial \pi(P, P')}{\partial t} = 0)$$

Logo, derivando a nossa equação teremos:

$$\frac{\partial \pi(P, P')}{\partial t} = rA_1e^{rt} - rA_2e^{-rt} = 0$$

$$A_1e^{rt} = A_2e^{-rt}$$

Portanto essa condição é necessária, pois para que haja reversão assumindo bom comportamento de nossas funções deve existir um ponto de derivada zero, atenção que isso não implica que se tem algum ponto de derivada zero tem reversão de preço.

4

Aqui sabemos pelo formato da nossa solução que nossa curva é catenária, qual será o ponto mínimo em cada um dos seguintes casos?

- $A_1 > A_2$
- $A_1 = A_2$

- $A_1 < A_2$

Isso dependera muito de quão maior ou menor as constantes serão, mas supondo casos extremos $A_1 > A_2$ temos que a parte A_1e^{rt} dominará A_2e^{-rt} e portanto teremos que o ponto de mínimo será $P(0)$

Caso o contrário ocorra e A_2 seja muito maior que A_1 então ocorrerá o contrário e o ponto de mínimo será em $P(T)$,

Caso ocorra o $A_1 = A_2$ já que e^{rt} domina e^{-rt}, então o minimo será $P(0)$.

Para que ocorra reversão de preço é necessário que $A_2 > A_1$, de forma que em algum momento haja uma reversão aonde A_2e^{-rt} domine A_1e^{rt} durante parte do periodo.

5

Pulamos esse item porque simplesmente não agrega em muito no entendimento do problema

6

Essencialmente nosso problema terá alguns elementos a mais, portanto construindo nosso problema teremos:

$$V(\pi) = \int_0^T e^{-\rho t}\pi(P, P')dt$$

Portanto queremos:

$$\max V(\pi)$$

Sujeito à:

$$P(0) = P_0$$
$$P(T) = P_T$$

Nossa função lucro é:

$$\pi(P, P') = e^{-\rho t}\Big[P(t)\big[a + 2\alpha ab - \beta\big] - P(t)^2\big[b + \alpha b^2\big] + P'(t)\big[\beta h - 2\alpha ah\big]$$
$$-P'(t)^2\big[\alpha h^2\big] + P(t)P'(t)[h + 2\alpha bh] - \big[\alpha a^2 - \beta a + \gamma\big]\Big]$$

Queremos resolver o problema usando a C.P.O que é nossa equação de Euler dada por:

$$\pi_P - \pi_{tP'} - \pi_{PP'}P'(t) - \pi_{P'P'}P''(t) = 0$$

Estimando cada um dos componentes dessa equação teremos:

$$\pi_P = e^{-\rho t}\Big[a + 2\alpha ab - 2P(t)(b + \alpha b^2) + P'(t)(h + 2\alpha bh)\Big]$$

$$\pi_{P'} = e^{-\rho t}\Big[\beta h - 2\alpha ah - 2P'(t)\alpha h^2 + P(t)(h + 2\alpha bh)\Big]$$

$$\pi_{PP'} = e^{-\rho t}\Big[h + 2\alpha bh\Big]$$

$$\pi_{P'P'} = e^{-\rho t}\Big[-2\alpha h^2\Big]$$

$$\pi_{tP'} = -\rho e^{-\rho t}\Big[\beta h - 2\alpha ah - 2P'(t)\alpha h^2 + P(t)(h + 2\alpha bh)\Big]$$

Substituindo os componentes na equação de Euler já deixando $e^{-\rho t}$:

$$e^{-\rho t}\Big[a + 2\alpha ab - 2P(t)(b + \alpha b^2) + P'(t)(h + 2\alpha bh) - P'(t)(h + 2\alpha bh) + P''(t)(2\alpha h^2)$$
$$+\rho\beta h - 2\rho\alpha ah - 2P'(t)\rho\alpha h^2 + P(t)\rho(h + 2\alpha bh)\Big] = 0$$

Simplificando:

$$e^{-\rho t}\Big[a + 2\alpha ab - 2P(t)(b + \alpha b^2) + P''(t)(2\alpha h^2)$$
$$+\rho\beta h - 2\rho\alpha ah - 2P'(t)\rho\alpha h^2 + P(t)\rho(h + 2\alpha bh)\Big] = 0$$

Removendo $e^{-\rho t}$

$$a + 2\alpha ab - 2P(t)(b + \alpha b^2) + P''(t)(2\alpha h^2)$$
$$+\rho\beta h - 2\rho\alpha ah - 2P'(t)\rho\alpha h^2 + P(t)\rho(h + 2\alpha bh) = 0$$

Colocando termos em evidência:

$$(a + 2\alpha ab + \rho\beta h - 2\rho\alpha ah) - P(t)(b + \alpha b^2 + \rho(h + 2\alpha bh)) - P'(t)\rho\alpha h^2 + P''(t)2\alpha h^2$$

Trade-off de inflação e desemprego

Aqui abordaremos um assunto clássico na macro relacionado a curva de Phillips, nesse caso temos uma adaptação, a curva de Phillips que aprendemos na graduação relaciona inflação e desemprego aqui temos uma situação em que temos um diferencial do produto efetivo Y para o produto com inflação zero dado por Y_f, nossas funções de perda social, preço e nossa função de variação da inflação esperada são:

$$\begin{aligned} \lambda &= (Y_f - Y)^2 + \alpha p^2 \\ p &= -\beta(Y_f - Y) + \pi \\ \pi' &= j(p - \pi) \end{aligned} \tag{22}$$

Aqui λ representa nossa função de perda social, que é em relação aos desvios da renda Y de seus nível com inflação zero Y_f, portanto aqui há penalização quando nossa renda está maior ou menor do que no nível Y_f e também há penalização em relação a inflação.

Os preços p são função inversamente proporcionais a diferença $Y_f - Y$, ou seja quanto maior a renda em relação ao seu nível em inflação zero, maior o nível de preços, e também é linearmente relacionado com o nível de preços esperados dado por π.

A variação do nível de preços esperados dado por π' é função de quanto os preços efetivos p estão acima ou abaixo de π, corrigido por um vaor j.

Fazendo algumas manipulações nas equações acima, podemos fazer com que o desvio dos preços em relação as expectativa seja proporcional ao desvio do produto ao seu nível considerando inflação zero:

$$p - \pi = -\beta(Y_f - Y) \tag{23}$$

Multiplicando por j

$$\begin{aligned} j(p - \pi) = \pi' &= -\beta j(Y_f - Y) \\ Y_f - Y &= -\frac{\pi'}{\beta j} \end{aligned} \tag{24}$$

Assim chegamos que substituindo o resultado de (29) em (28) e isolando p:

$$p = \pi - \frac{\pi}{j} \tag{25}$$

Se substituirmos o resultado de (29) e (30) na função de perda social teremos:

$$\lambda(\pi, \pi') = \left(\frac{\pi'}{\beta j}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\pi'}{j} + \pi\right)^2 \tag{26}$$

Dada nossa função de perda social que agora é função tanto da inflação esperada quanto de sua variação vamos montar o problema, o banco central como autarquia gostaria de minimizar a função de perda social descontada por um fator de impaciência dada por:

$$V(\pi) = \int_0^T e^{-\rho t}\lambda(\pi, \pi')dt$$

Porém dentro de um arcabouço limitado o banco central consegue apenas no máximo controlar as expectativas de inflação controlando as taxas de juros no mercado, portanto aqui como nossa função de perda social depende apenas das expectativas de inflação nosso problema envolve

$$\min V(\pi)$$

Sujeito à:

$$\pi(0) = \pi_0$$
$$\pi(T) = 0$$

Ou seja, envolver minimizar a função de perda social em um determinado período de modo que ao final desse período a expectativa de inflação seja zero.

A partir disso para resolver esse problema precisamos montar nossa equação de Euler dada por:

$$\lambda_\pi - \lambda_{t\pi'} - \lambda_{\pi\pi'}\pi'(t) - \lambda_{\pi'\pi'}\pi''(t) = 0$$

Dada a equação de Euler vamos montar cada um dos componentes

$$\begin{aligned}
\lambda_\pi &= e^{-\rho t}\Big[2\alpha(\frac{\pi'}{j} + \pi)\Big] \\
\lambda_{\pi'} &= e^{-\rho t}\Big[2\frac{\pi'}{\beta^2 j^2} + 2\alpha\Big(\frac{\pi}{j} + \frac{\pi'}{j^2}\Big)\Big] \\
\lambda_{\pi'\pi} &= e^{-\rho t}\Big[2\frac{2\alpha}{j}\Big] \\
\lambda_{\pi'\pi'} &= e^{-\rho t}\Big[\frac{2}{\beta^2 j^2} + \frac{2\alpha}{j}\Big] \\
\lambda_{t\pi'} &= -\rho e^{-\rho t}\Big[2\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi' + \frac{2\alpha}{j}\pi\Big]
\end{aligned} \tag{27}$$

Juntando os argumentos da nossa equação de Euler, já colocando $e^{-\rho t}$ em evidência:

$$e^{-\rho t}\Big[2\alpha\Big(\frac{\pi'}{j}+\pi\Big)-2\rho\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi'-\frac{2\rho\alpha}{j}\pi-\frac{2\alpha}{j}\pi'-2\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi''\Big]=0$$
$$2e^{-\rho t}\Big[\alpha\Big(\frac{\pi'}{j}+\pi\Big)-\rho\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi'-\frac{\rho\alpha}{j}\pi-\frac{\alpha}{j}\pi'-\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi''\Big]=0 \tag{28}$$
$$2e^{-\rho t}\Big[\Big(\alpha-\frac{\alpha\rho}{j}\Big)\pi-\rho\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi'-\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi''\Big]=0$$

Podemos então simplificar nossa equação de Euler de forma que:

$$\Big(\frac{\alpha(j-\rho)}{j}\Big)\pi-\rho\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi'-\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\pi''=0 \tag{29}$$

Podemos multiplicar nossa equação por $-\frac{\beta^2 j^2}{1+\alpha\beta^2}$ e portanto teremos:

$$\pi''+\rho\pi'-\Big(\frac{\beta^2 j(\rho-j)}{1+\alpha\beta^2}\Big)\pi=0 \tag{30}$$

Para economizar espaço e notação suponha que $\Omega=\frac{\beta^2 j(\rho-j)}{1+\alpha\beta^2}$, chegamos portanto na seguinte E.D.O:

$$\pi''+\rho\pi'-\Omega\pi=0 \tag{31}$$

Para resolver uma E.D.O homogênea de segundo grau, precisamos apenas aplicar Bhaskara:

$$\Delta=\rho^2+4\Omega$$

Portanto:

$$r_1,r_2=\frac{-\rho\pm\sqrt{\rho^2+4\Omega}}{2}$$

Aqui temos que supondo que que $\Omega=0$ então $r_1=0, r_2<0$, caso $\Omega>0$ então $r_1>0, r_2<0$, Portanto nossa solução homogenea é:

$$\pi(t)=A_1e^{r_2t}+A_2e^{r_2t} \tag{32}$$

Para encontrar as constantes A_1 e A_2 utilizaremos as condições de contorno previamente informadas e portanto teremos o seguinte sistema de equações:

$$\pi(0)=A_1+A_2=\pi_0$$
$$\pi(T)=A_1e^{r_1T}+A_2e^{r_2T}=0$$

Daqui primeira equação tiramos que:

$$A_1=\pi_0-A_2$$

Substituindo na segunda equação do sistema temos que:

$$(\pi_0 - A_2)e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} = 0$$

$$\pi_0 e^{r_1 T} - A_2 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} = 0$$

$$-A_2 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 T} = -\pi_0 e^{r_1 t}$$

Multiplicando por -1:

$$A_2 e^{r_1 T} - A_2 e^{r_2 T} = \pi_0 e^{r_1 T} \implies A_2 = \frac{\pi_0 e^{r_1 t}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}}$$

Substituindo A_2 na primeira equação do sistema podemos recuperar A_1

$$A_1 + \frac{\pi_0 e^{r_1 t}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} = \pi_0$$

$$A_1 = \pi_0 - \frac{\pi_0 e^{r_1 t}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} = \frac{-\pi_0 e^{r_2 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}}$$

Portanto nossa solução é:

$$\pi(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$$

Com:

$$r_1, r_2 = \frac{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\Omega}}{2}$$

$$A_1 = \frac{-\pi_0 e^{r_2 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}}$$

$$A_2 = \frac{\pi_0 e^{r_1 t}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}}$$

O que podemos dizer sobre as constantes A_1 e A_2? Temos que $r_1 > r_2$ e portanto $e^{r_1 T} > e^{r_2 T}$, portanto $A_1 < 0$ e $A_2 > 0$.

Questões

1

Resolvido no passo a passo detalhado acima

2

O que muda se multiplicarmos $\lambda(\pi, \pi')$ por 1/2? Na verdade nada so economizamos um pouco de notação e simplificamos nosso problema.

3

O que muda se mudarmos a condição terminal para:

$$\pi(T) = \pi_T$$

Sendo que $0 < \pi_T < \pi_0$, portanto vamos recalcular nossas constantes:

$$\pi(0) = A_1 + A_2 = \pi_0$$
$$\pi(T) = A_1 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} = \pi_T$$

Daqui primeira equação tiramos que:

$$A_1 = \pi_0 - A_2$$

Substituindo na segunda equação do sistema temos que:

$$(\pi_0 - A_2)e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} = \pi_T$$

$$\pi_0 e^{r_1 T} - A_2 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} = \pi_T$$

$$-A_2 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 T} = \pi_T - \pi_0 e^{r_1 t}$$

Multiplicando por -1:

$$A_2 e^{r_1 T} - A_2 e^{r_2 T} = \pi_0 e^{r_1 T} - \pi_T \implies A_2 = \frac{\pi_0 e^{r_1 t} - \pi_T}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}}$$

Agora calculando A_1, substituindo A_2 na primeira equação do sistema podemos recuperar A_1

$$A_1 + \frac{\pi_0 e^{r_1 t} - \pi_T}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} = \pi_0$$

$$A_1 = \pi_0 - \frac{\pi_0 e^{r_1 t} - \pi_T}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} = \frac{\pi_T - \pi_0 e^{r_2 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}}$$

Aqui a intuição permanece a mesma, como premissa temos que $0 < \pi_T < \pi_0$ então $A_1 < 0$ e $A_2 > 0$