Problemas Controle ótimo
Macroeconomia I

Yuri Passuelo – yuripassuelo@usp.br

7 de julho de 2025

Resolução dos exercícios 7.6 e 7.7 do Elements of Dynamic Optimization do Chiang.

Modelo de Ciclo Politico

Modelo de ciclo politico nos diz sobre o comportamento de um governo, que tem como objetivo sempre a reeleição, o problema combina uma série de elementos tanto de controle ótimo quanto de assuntos macro que nos interessam, aqui nos é dado que:

$$\begin{aligned} v = v(U,p) \ ; \ v_U < 0 \ ; \ v_p < 0 \\ p = \phi(U) + a\pi \ ; \ \phi' < 0 \\ \dot{\pi} = b(p - \pi) \end{aligned} \tag{1}$$

Ou seja o eleitor entende tanto o desemprego U quanto a inflação p como maus.

Aqui a economia é sujeita a uma curva de Phillips tal que o desemprego afeta de forma inversamente proporcional a inflação e as expectativas. e além disso existe uma equação de movimento das expectativas de inflação, tal que são corrigidas de forma proporcional b ao desvio em relação as expectativas.

Aqui nossa variável de controle é o desemprego U, temos que aqui nosso objetivo é:

$$\max_U \int_0^T v(U,p)e^{rt}dt$$

Sujeito à:

$$p = \phi(U) + a\pi$$

$$\dot{\pi} = b(p - \pi)$$

Por mais que a variável de controle U afete diretamente a função objetivo, que é maximizar diretamente a funcional, devido tanto a equação de curva de Phillips quanto a equação de movimento, apresentando um *trade-off*. Vamos a parametrização adotada no exercício:

$$v(U,p) = (-U^2 - hp)e^{rt}$$

$$p = (j - kU) + a\pi$$

$$\dot{\pi} = b(p - \pi)$$

Substituindo p nas funções:

$$v(U,p) = (-U^2 - h((j - kU) + a\pi))e^{rt} = (-U^2 - hj + hkU - ha\pi)e^{rt}$$

$$\dot{\pi} = b((j - kU) + a\pi - \pi) = b(j - kU - (1 - a)\pi)$$

Portanto nosso problema:

$$\max_{U} \int_0^T v(U,p)e^{rt}dt$$

Sujeito à:

$$\dot{\pi} = b((j - kU) + a\pi - \pi) = b(j - kU - (1 - a)\pi)$$

$$\pi(0) = \pi_0$$

$$\lambda(T) = 0$$

Vamos a construção da nossa Hamiltoniana:

$$H(t,\pi,\dot{\pi},\lambda,U) = v(U,p)e^{rt} + \lambda\dot{\pi}$$

$$H(t,\pi,\dot{\pi},\lambda,U) = (-U^2 - h((j - kU) + a\pi)) = (-U^2 - hj + hkU - ha\pi)e^{rt} + \lambda(b(j - kU - (1 - a)\pi))$$

Vamos a primeira condição de primeira ordem:

$$\frac{\partial H}{\partial U} = (-2U + hk)e^{rt} - \lambda bk = 0$$

Portanto:

$$U = \frac{k}{2}\Big[h - \lambda b e^{-rt}\Big]$$

Vemos que nossa trajetória ótima de controle nos dá basicamente uma função que depende da nossa variável de coestado, para isso vamos usar a equação de movimento da variável de coestado:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \pi}$$

$$\dot{\lambda} = -(-hae^{rt} - \lambda b(1-a))$$

Portanto temos uma equação diferencial tal que:

$$\dot{\lambda} - \lambda b(1-a) = hae^{rt}$$

Vamos portanto resolver essa E.D.O, assim temos que a solução homogenea terá:

$$\lambda_h = e^{\gamma t}; \dot{\lambda_h} = \gamma e^{\gamma t}$$

Logo:

$$\gamma e^{\gamma t} - b(1-a)e^{\gamma t} = 0 \implies \gamma = b(1-a)$$

Tendo portanto a solução homogenea:

$$\lambda(t) = A_1 e^{b(1-a)t}$$

Vamos a solução particular, para isso suponhemos que a aparência da mesma é:

$$\lambda_p = De^{\gamma t} \ ; \gamma De^{\gamma t}$$

Substituindo teremos:

$$\gamma De^{\gamma t} - Db(1-a)e^{\gamma t} = hae^{rt}$$

$$D(\gamma - b(1-a))e^{\gamma t} = hae^{rt}$$

Dada a igualdade chegamos em um sistema tal que:

$$\gamma = r$$

$$D(r - b(1-a)) = ha \implies D = \frac{ha}{r - b(1-a)}$$

Portanto a solução geral é:

$$\lambda(t) = A_1 e^{b(1-a)t} + \frac{ha}{r - b(1-a)} e^{rt}$$

Aqui temos que é A_1 é uma constante desconhecida, para encontrar essa constante vamos usar a condição de transversalidade:

$$\lambda(T) = 0$$

$$\lambda(T) = A_1 e^{b(1-a)T} + \frac{ha}{r-b(1-a)} e^{rT} = 0$$

Isolando A_1 teremos:

$$A_1 = -\frac{ha}{r-b(1-a)} e^{(r-b(1-a))T}$$

Portanto:

$$\lambda(t) = \frac{ha}{r-b(1-a)} e^{rt} - \frac{ha}{r-b(1-a)} e^{[r-b(1-a)]T} e^{b(1-a)t}$$

Podemos supor aqui que $B = r - b(1-a)$ e simplificar nosso problema de tal modo que:

$$\lambda(t) = \frac{ha}{B} e^{rt} - \frac{ha}{B} e^{[r-b(1-a)]T} e^{b(1-a)t}$$

Vamos portanto substituir λ em nossa função de desemprego:

$$U(t) = \frac{k}{2}\Big[h - (\frac{ha}{B} e^{rt} - \frac{ha}{B} e^{[r-b(1-a)]T} e^{b(1-a)t}) b e^{-rt}\Big]$$

Simplificando:

$$U(t) = \frac{kh}{2B}\Big[(r-b) + bae^{B(T-t)}\Big]$$

Conclusões:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -khbae^{B(T-t)}$$

Supondo que $B > 0$ teremos $\frac{\partial U}{\partial t} < 0$ portanto a função é decrescente, analisando a segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = Bkhhae^{B(T-t)}$$

aqui temos uma função Concava e portanto a trajetória de controle ótima desse problema é uma curva decrescente de forma concava.

$$U(0) = \frac{kh}{2B}\Big[(r-b) + bae^{BT}\Big]$$

$$U(T) = \frac{kh}{2B}\Big[(r-b) + ba\Big]$$

Vamos aos exercícios:

1)

a)

Para que a primeira derivada $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ teremos que portanto a taxa de desemprego em todo período seria constante.

b)/c)

Para que a primeira derivada seja constante, alguma das constantes k, h, b ou a teriam que ser iguais a, abaixo as implicações econômicas de cada um:

- Caso k seja igual à zero estamos falando que não existe a relação entre inflação e desemprego da curva de Phillips que foi parametrizada como:

$$p = (j - kU) + a\pi$$

  Portanto aqui o desemprego não afetaria a inflação

- Caso h seja igual a zero, então estamos estabelecendo que nossa função de voto não toma a inflação como um ponto que afeta, relembrando a função voto:

$$v(U, p) = -U^2 - hp$$

- Caso a seja igual a zero então temos que nossa variável de estado π que aqui são as expectativas de inflação não afetam a curva de Phillips, portanto como não a relação entre desemprego U, expectativas π e inflação de forma direta, basta achar U que maximize a função de voto

$$p = (j - kU) + a\pi$$

- Caso b seja igual a zero então temos que nossa equação de movimento indica que nossas expectativas de inflação π são constantes, logo como desemprego não afetaria de forma indireta as expectativas que são constantes, o melhor desemprego é o que maximiza.

$$\dot{\pi} = b(p - \pi)$$

2)

Aqui k e h seriam justamente as variáveis que tornariam não só U constante como igual a zero, isso pois se caso h for igual à zero, então temos que a função de voto simplesmente não leva em conta a inflação, e para maximiza-la basta que seja igual à zero.

No caso em que $k=0$ temos que não há *trade-off* entre inflação e desemprego e portanto não precisamos nos importar com essa relação entre inflação e desemprego e portanto temos que basta minimizar U e portanto não se preocupar nos efeitos sobre os preços.

3)

Aqui queremos entender o impacto da variação da memória r sobre a função de desemprego que calculamos, relembrando a função de desemprego:

$$U(t) = \frac{kh}{2B}\Big[(r-b) + bae^{B(T-t)}\Big]$$

Portanto:

$$U(t) = \frac{kh(r-b)}{2B} + \frac{kh}{2B}bae^{B(T-t)}$$

Derivando:

$$\frac{\partial U(t)}{\partial r} = \frac{kh}{2B}\Big[\frac{B-(r-b)}{B} + \frac{(T-t)Bbae^{B(T-t)} - bae^{B(T-t)}}{B}\Big]$$

$$= \frac{kh}{2B}\Big[[1+(T-t)bae^{B(T-t)}] - \frac{1}{B}\Big((r-b)+bae^{B(T-t)}\Big)\Big]$$

$$= \frac{kh}{2B}\Big[1+(T-t)bae^{B(T-t)}\Big] - \frac{1}{B}U(t)$$

Ou seja variar a memória em r (Marginalmente, diminui o desemprego em $\frac{1}{B}U(t)$, porém tem um efeito marginal decrescente com o tempo de aumento do desemprego em $\frac{kh}{2B}\Big[1 + (T-t)bae^{B(T-t)}\Big]$, o que pode ser maior se considerarmos que $1 > r-b$ e que $T-t > 0$, ou seja dependendo das constantes e do momento no tempo aumentar a memoria do eleitor aumenta o desemprego que depois tem queda conforme o tempo evolui.

4)

Aqui precisamos refazer o problema porém retirando a memória e^{rt}. Vamos portanto analisar nosso problema

$$\max_U \int_0^T v(U,p)dt$$

Sujeito à:

$$\dot{\pi} = b(p-\pi)$$

Vamos portanto construir nossa Hamiltoniana:

$$H(t,\pi,\dot{\pi},\lambda,U) = v(U,p) + \lambda\dot{\pi}$$

$$H(t,\pi,\dot{\pi},\lambda,U) = -U^2 - hj + hkU - ha\pi + \lambda(b(j - kU - (1-a)\pi))$$

Calculando nossas condições de primeira ordem teremos:

$$\frac{\partial H}{\partial U} = -2U + hk - \lambda bk = 0$$

Isolando U teremos:

$$U = \frac{k}{2}\Big[h - \lambda b\Big]$$

Usando agora a equação de movimento da variável de co-estado:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \pi}$$

$$\dot{\lambda} = -(-ha + \lambda b(1-a))$$

$$\dot{\lambda} = ha + b(1-a)\lambda$$

Como chegamos a uma E.D.O, vamos resolve-la, primeiramente pela parte Homogênea:

$$\lambda_h = e^{\gamma t}\ ;\ \dot{\lambda_h} = \gamma e^{\gamma t}$$

$$\lambda_h = A_1 e^{b(1-a)t}$$

Substituindo teremos:

$$\gamma e^{\gamma t} - b(1-a)e^{\gamma t} = 0 \implies \gamma = b(1-a)$$

Agora a solução particular, temos como chute que $\lambda_p = C$, portanto:

$$-Cb(1-a) = ha \implies C = -\frac{ha}{b(1-a)}$$

Resumindo:

$$\lambda(t) = A_1 e^{b(1-a)t} - \frac{ha}{b(1-a)}$$

Usando a condição de transversalidade $\lambda(T) = 0$ para encontrar A_1

$$\lambda(T) = A_1 e^{b(1-a)T} - \frac{ha}{b(1-a)} = 0 \implies A_1 = \frac{ha}{b(1-a)}e^{-b(1-a)T}$$

Portanto:

$$\lambda(t) = \frac{ha}{b(1-a)} e^{b(a-1)(T-t)} - \frac{ha}{b(1-a)}$$

Substituindo na nossa variável de controle teremos:

$$U(t) = \frac{k}{2}\left[h - \frac{ha}{1-a} e^{b(a-1)(T-t)} + \frac{ha}{1-a}\right]$$

Que equivale ao pegar o resultado do modelo anterior e substituir $r = 0$

Uso energético e qualidade ambiental

Aqui portanto a variação dos estoques de combustível $\dot{S(t)}$ é igual á:

$$\dot{S(t)} = E(t)$$

Nessa economia temos que tanto o consumo de bens quanto a poluição no sistema são funções diretas da taxa de extração de recursos, não só funções, mas funções que são crescentes na taxa de extração e além disso possuem taxas decrescentes logo:

$$C(E(t)) \ ; \ C' > 0 \ ; \ C'' < 0$$

$$P(E(t)) \ ; \ P' > 0 \ ; \ P'' < 0$$

A utilidade dos trabalhadores nesse modelo é função crescente do consumo e decrescente da utilidade de modo que:

$$U[C(E(t)), P(E(t))]$$

$$U_C > 0 \ ; \ U_P < 0$$

$$U_{CC} < 0 \ ; \ U_{PP} < 0 \ ; \ U_{CP} = 0$$

De forma geral nosso problema é estruturado da seguinte forma

$$\max_E \int_0^T U[C(E), P(E)]dt$$

Sujeito à:

$$\dot{S} = -E$$

$$S(0) = S_0 \ ; \ S(T) \geq 0$$

Note que aqui temos um problema de linha termina vertical truncada, e portanto nossa condição de transversalidade é dada por:

$$\lambda(T)(S(T) - S_{\min}) = 0$$

A partir da construção do problema vamos a construção da Hamiltoniana:

$$H = -\lambda E$$

Construída a Hamiltoniana vamos a condição de primeira ordem em relação a variável de controle E. Aqui basta aplicar a regra da cadeia:

$$\frac{\partial H}{\partial E} = \frac{\partial H}{\partial C(E)}\frac{\partial C(E)}{\partial E} + \frac{\partial H}{\partial P(E)}\frac{\partial P(E)}{\partial E} - \lambda = 0$$

De outra maneira temos que:

$$\frac{\partial H}{\partial E} = U_C C'(E) + U_P P'(E) - \lambda = 0$$

Calculando a segunda derivada de modo a garantir que estamos maximizando a função

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E^2} =$$

Garantida a condição de que estamos maximizando nosso problema, vamos utilizar a equação de movimento da variável de coestado λ:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial S}$$

Note que em nenhum momento existe de forma explicita a variável de estado do estoque de combustíveis $S(t)$ portanto temos:

$$\dot{\lambda} = 0$$

Isso implica que variável de coestado é constante:

$$\int \dot{\lambda} dt = \int 0 dt = C$$

Relembrando nossa condição de transversalidade temos:

$$\lambda(T)S(T) = 0$$

Dado a condição de transversalidade temos duas possibilidades:

- $\lambda(T) = 0$ e $S(T) \geq 0$
- $\lambda(T) \neq 0$ e $S(T) = 0$

Vamos analisar a primeira possibilidade

$$\lambda(t) = 0 \ \forall t$$

Nossa C.P.O se torna:

$$\frac{\partial H}{\partial E} = U_C C'(E) + U_P P'(E) = 0$$

Logo no ótimo:

$$U_C C'(E) = -U_P P'(E)$$

Aqui temos uma interpretação básica, que no ótimo a utilidade marginal do consumo multiplicado pela produtividade marginal do consumo em relação a taxa de extração deve ser igual a desutilidade marginal da poluição multiplicada pela poluição marginal em relação a extração.

Como não há explicitamente nada temporalmente dependente nessa condição de equilíbrio, temos que E aqui provavelmente será uma constante, já que temos nossa variável de coestado constante também em todo período.

Usando a equação de movimento do estoque de combustíveis:

$$\dot{S(t)} = -E$$

$$\int \dot{S(t)}dt = -\int Edt \implies S(t) = -Et + k$$

Sabendo a condição de contorno $S(0) = S_0$ teremos:

$$S(0) = S_0 = k - E * 0$$

Portanto:

$$S(T) \geq 0$$

$$S_0 - ET \geq 0$$

$$S_0 \geq ET$$

$$\frac{S_0}{T} \leq E$$

Caso pensemos na segunda condição, então temos que $\lambda \neq 0$, portanto teremos que ter

$$S(t) = 0 \implies E = \frac{S_0}{T}$$

1)

Para analisar essa questão precisamos analisar o diagrama de gráficos apresentados no livro, que estão logo acima.

2)

O que aconteceria nesse problema caso nosso problema de linha terminal vertical fosse $S(T) \geq S_{\min} > 0$.

Aqui temos que a única mudança dos exemplos anteriores são as condições de transversalidade, dessa forma, pegando a equação de movimento do:

$$\int \dot{S} dt = -\int E dt = k - Et$$

Portanto, usando a condição de contorno temos:

$$S(0) = S_0 = k - E * 0 \implies k = S_0$$

Lembrando das condições de transversalidade:

- $\lambda(T) = 0$ e $S(T) \geq 0$
- $\lambda(T) \neq 0$ e $S(T) = 0$

Portanto supondo $\lambda(T) = 0$ temos:

$$S(T) \geq S_{\min}$$

$$S_0 - ET \geq S_{\min}$$

$$E \leq \frac{S_0 - S_{\min}}{T}$$

A diferença é que um determinado grau mínimo de estoques de combustível deverá ser mantido, e portanto se pegarmos os gráficos do livro eles deverão parar antes do 0.

Supondo que $\lambda(T) \neq 0$ e $S(T) = 0$ teremos:

$$\lambda(T) = \lambda \neq 0$$

$$E = \frac{S_0 - S_{\min}}{T}$$

3)

Aqui queremos entender o impacto de incluir um fator de desconto $e^{-\rho t}$?

a)

Vamos construir o problema, construir a Hamiltoniana e portanto olhar as condições de primeira ordem

A hamiltoniana:

$$H = e^{-\rho t}(U[C(E), P(E)]) - \lambda E$$

Portanto a nossa condição de primeira ordem em relação á a variável de controle (Taxa de extração) é:

$$\frac{\partial H}{\partial E} = e^{-\rho t}(U_C C'(E) + U_P P'(E)) - \lambda = 0$$

Analizando as equações de movimento da variável de Estado e Coestado:

$$\dot{S} = -E$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial S} = 0$$

Portanto apenas alteramos a condição de identificação/C.P.O. Caso tenhamos:

b)

Vamos analisar a equação de movimento de coestado

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial S}$$

$$\dot{\lambda} = 0$$

Aqui também temos uma constante em relação à variável de coestado, nesse caso o fator de desconto não acaba fazendo muita diferença no problema.

c)

Caso supormos que a condição $\lambda(T) = 0$ esteja valendo então:

$$\frac{\partial H}{\partial E} = e^{-\rho t}(U_C C'(E) + U_P P'(E)) = 0$$

Logo

$$e^{-\rho t}(U_C C'(E)) = -e^{-\rho t}(U_P P'(E)) \implies U_C C'(E) = -U_P P'(E)$$

E a partir dessa condição temos que, usando a equação de movimento do estoque de combustíveis:

$$\dot{S(t)} = -E$$

$$\int \dot{S(t)}dt = -\int Edt \implies S(t) = -Et + k$$

Sabendo a condição de contorno $S(0) = S_0$ teremos:

$$S(0) = S_0 = k - E * 0$$

Portanto:

$$S(T) \geq 0$$

$$S_0 - ET \geq 0$$

$$S_0 \geq ET$$

$$\frac{S_0}{T} \leq E$$

A nossa condição nesse caso é o mesmo caso que observamos na situação base.

d)

Caso tenhamos $S(T) = 0$ e $\lambda(T) = C$ teremos nossa C.P.O:

$$e^{-\rho t}(U_C C'(E)) = -e^{-\rho t}(U_P P'(E)) + \lambda$$

Nesse caso apesar de λ ser uma constante E deverá ser uma função.