Lista 1
Macroeconomia I

Yuri Passuelo – yuripassuelo@usp.br

20 de maio de 2025

Resolução dos exercícios da primeira lista da disciplinas de Macroeconomia I.

Problem 1

Considere uma economia com o tempo discreto e infinito, *i.e.*, $t = 0, 1, 2, ...$ Nesta economia vivem duas pessoas de vida eterna indexadas por i = 1,2. Existe um único bem, que é perecível, e cada pessoa tem uma dotação $e_t^i = 1$ para todo t deste bem. As preferências das pessoas sobre um fluxo de consumo, $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}$ são dadas por:

$$u^i(\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty}(\beta_i)^t \ln\,(c_t^i),$$

Em que $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$. Toda informação desta economia é pública e não há nenhum risco. Em $t = 0$, antes de receber a dotação, as pessoas se encontram em um mercado central e transacionam unidades do bem de consumo para todos os períodos. Denote por p_t o preço de uma unidade do bem no período t. Em todo $t \geq 1$ as pessoas voltam ao mercado central para executar as trocas negociadas em $t = 0$. Assuma que os acordos feitos no início dos tempos são sempre honrados pelas pessoas.

(a) Defina uma alocação factível para esta economia.

(b) Defina um equilíbrio competitivo (de Arrow-Debreu) para esta economia.

(c) Caracterize o equilíbrio competitivo da economia.

(d) Seja $\hat{c}_t^i$ o consumo de equilíbrio da pessoa i no período t. Mostre que:

(i) $\hat{c}_0^1 - \hat{c}_0^2 > 0$

(ii) $\lim_{t\to\infty}\hat{c}_t^1 = 0$ e $\lim_{t\to\infty}\hat{c}_t^2 = 2$

(e) Explique a intuição dos resultados demonstrados no item anterior.

(f) É fácil ver que as sequências de consumo de equilíbrio são monótonas. Escreva um código que encontre o período $t*(\beta_1, \beta_2)$ para o qual $\hat{c}_t^1 - \hat{c}_t^2$ troca de sinal para β's genéricos. Fixe $\beta_2 = 0.95$ e faça um gráfico para mostrar $t*(\beta_1, \beta_2)$.[1]

Solution

Para a solução dos dois primeiros exercícios basta checar as definições em Krueger (2017) Cap. 2 *pgs 7, 8 e 9*.

(a)

Uma alocação $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ é factível se:

1. $$c_t^i \geq 0 \ , \forall i \in \{1,2\}, \forall t$$

2. $$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2$$

Ou seja se temos Consumos não negativos para ambos os agentes em todos os períodos e além disso temos o Market Clearing. Aonde a soma do que é consumido é exatamente a soma das dotações iniciais

(b)

Voltando ao Krueger (2017) Cap. 2 *pgs 7,8 e 9*, a definição de um equilíbrio competitivo[2] se dá por dois elementos:

1. Dado um vetor de preços $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$ para $i \in \{1,2\}$, $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}$ resolve:

$$\max_{\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} (\beta_i)^t \ln(c_t^i)$$

Sujeito à:

[1] É possível encontrar analiticamente $t*(\beta_1, \beta_2)$. Não é este o propósito do exercício. Resolva o problema numericamente.

[2] Também podemos chamar de equilíbrio de Arrow-Debreu

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t e_t^i$$

$$c_t^i \geq 0 \ , \forall t$$

2. Market Clearing, ou seja:

$$\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2 \ , \forall t$$

Definição do equilíbrio é o vetor de consumo, não negativo, que maximiza o fluxo de consumo descontado para ambos os indivíduos e que é factível e "cabe"no orçamento.

(c)

Para a caracterização do equilíbrio podemos adotar duas estratégias distintas

- Solução por "força bruta"usando as condições de Kuhn Tucker
- Solução por Método de Negishi, o passo a passo pode ser encontrado em Krueger (2017) Cap. 2 *pgs 15 à 21.*

Ambas as formas serão apresentadas abaixo

Força Bruta

Para o método força bruta começaremos primeiro mostrando o lagrangeano definido por:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} (\beta_i)^t \ln\,(c_t^i) - \lambda_i (\sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i - p_t e_t^i)$$

C.P.O's:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^i} = \frac{(\beta_i)^t}{c_t^i} - \lambda_i p_t = 0 \implies \lambda_i = \frac{(\beta_i)^t}{p_t c_t^i}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}^i} = \frac{(\beta_i)^{t+1}}{c_{t+1}^i} - \lambda_i p_{t+1} = 0 \implies \lambda_i = \frac{(\beta_i)^{t+1}}{p_{t+1} c_{t+1}^i}$$

Igualando os lambdas:

$$\frac{(\beta_i)^t}{p_t c_t^i} = \frac{(\beta_i)^{t+1}}{p_{t+1} c_{t+1}^i}$$

$$p_{t+1} c_{t+1}^i = \beta_i p_t c_t^i$$

De forma geral usando os t primeiros períodos:

$$p_1 c_1^i = \beta_i p_0 c_0^i$$

$$p_2 c_2^i = \beta_i p_1 c_1^i = \beta_i^2 p_0 c_0^i$$

$$\vdots$$

$$p_t c_t^i = \beta_i^t p_0 c_0^i$$

Sabendo que $e_t^i = 1$, $\forall t$ então:

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i = \sum_{t=0}^{\infty} p_t$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t p_0 c_0^i = \sum_{t=0}^{\infty} p_t$$

Como p_0 e c_0^i são constantes:

$$p_0 c_0^i \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t = \sum_{t=0}^{\infty} p_t$$

Como a igualdade vale para ambos os indivíduos $i = 1, 2$ então

$$p_0 c_0^1 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_1^t = p_0 c_0^2 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_2^t$$

$$c_0^1 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_1^t = c_0^2 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_2^t$$

Como $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ então temos que:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta_1^t = \frac{1}{1 - \beta_1}$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta_2^t = \frac{1}{1 - \beta_2}$$

Logo nossa igualdade se torna:

$$\frac{c_0^1}{1 - \beta_1} = \frac{c_0^2}{1 - \beta_2}$$

$$c_0^1 = \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2} c_0^2$$

Usando a condição de Market Cleaning:

$$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = 2$$

$$c_0^1 + c_0^2 = 2$$

$$\frac{1-\beta_1}{1-\beta_2} c_0^2 + c_0^2 = 2$$

$$\frac{2-\beta_1-\beta_2}{1-\beta_2} c_0^2 = 2$$

$$c_0^2 = \frac{2-2\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}$$

$$c_0^1 = \frac{2-2\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}$$

substituindo e Usando que $\forall i \in \{1,2\}[p_t c_t^i = \beta_i^t p_0 c_0^i]$ e supondo $p_0 = 1$, podemos somar essa condição para ambos os indivíduos e obter:

$$p_t c_t^1 + p_t c_t^2 = \beta_1^t c_0^1 + \beta_2^t c_0^2$$

Substituindo c_0^1 e c_0^2:

$$p_t(c_t^1 + c_t^2) = 2p_t = \frac{2\beta_1^t(1-\beta_1) + 2\beta_2^t(1-\beta_2)}{2-\beta_1-\beta_2}$$

Como $c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = 2$ então:

$$p_t = \frac{\beta_1^t(1-\beta_1) + \beta_2^t(1-\beta_2)}{2-\beta_1-\beta_2}$$

Encontrado o preço em função do tempo vamos descobrir as funções de equilíbrio para c_t^1 e c_t^2:

$$c_t^1 = \frac{\beta_1^t c_0^1}{p_t} = \frac{\beta_1^t \frac{2-2\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}}{\frac{\beta_1^t(1-\beta_1)+\beta_2^t(1-\beta_2)}{2-\beta_1-\beta_2}} = \frac{\beta_1^t(2-2\beta_1)}{\beta_1^t(1-\beta_1)+\beta_2^t(1-\beta_2)}$$

$$c_t^2 = \frac{\beta_1^t c_0^1}{p_t} = \frac{\beta_2^t \frac{2-2\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}}{\frac{\beta_2^t(1-\beta_1)+\beta_2^t(1-\beta_2)}{2-\beta_1-\beta_2}} = \frac{\beta_2^t(2-2\beta_2)}{\beta_1^t(1-\beta_1)+\beta_2^t(1-\beta_2)}$$

Método de Negishi

Para o método de Neguishi basta construirmos o problema de lagrangeano ponderando cada indivíduos por um peso α_i, a restrição da mesma forma que no caso "força bruta"é que a soma dos consumos dos indivíduos em t seja a soma das dotações em t.

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_1 \beta_1^t \text{log } c_t^1 + \alpha_2 \beta_2^t \text{log } c_t^2 - \frac{\mu_t}{2}[c_t^1 + c_t^2 - 2]$$

Vamos tirar as condições de primeira ordem em relação a c_t^1 e c_t^2 e teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^1} = \frac{\alpha_1 \beta_1^t}{c_t^1} - \frac{\mu_t}{2} = 0 \implies \frac{\mu_t}{2} = \frac{\alpha_1 \beta_1^t}{c_t^1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^2} = \frac{\alpha_1 \beta_2^t}{c_t^2} - \frac{\mu_t}{2} = 0 \implies \frac{\mu_t}{2} = \frac{\alpha_2 \beta_2^t}{c_t^2}$$

Igualando $\mu_t/2$ teremos:

$$\frac{\alpha_2 \beta_2^t}{c_t^2} = \frac{\alpha_1 \beta_1^t}{c_t^1}$$

Portanto:

$$c_t^1 = \frac{\alpha_1 \beta_1^t}{\alpha_2 \beta_2^t} c_t^2$$

Substituindo na restrição teremos:

$$\frac{\alpha_1 \beta_1^t}{\alpha_2 \beta_2^t} c_t^2 + c_t^2 = 2$$

Portanto:

$$c_t^2 = \frac{2\alpha_2 \beta_2^t}{\alpha_1 \beta_1^t + \alpha_2 \beta_2^t}$$

$$c_t^1 = \frac{2\alpha_1 \beta_1^t}{\alpha_1 \beta_1^t + \alpha_2 \beta_2^t}$$

A partir do consumo encontraremos μ_t

$$\frac{\mu_t}{2} = \frac{\alpha_1 \beta_1^t}{1} \frac{\alpha_1 \beta_1^t + \alpha_2 \beta_2^t}{2\alpha_1 \beta_1^t}$$

$$\mu_t = \alpha_1 \beta_1^t + \alpha_2 \beta_2^t$$

A partir do fato que encontramos c_1^t, c_2^t e μ_t vamos para a parte quase final, que é a de funções de transferência, aqui queremos basicamente garantir que nosso problema respeita as condições de que em cada período consumimos apenas exclusivamente as dotações e não guardamos poupança, além de encontrar os pesos relativos α_1 e α_2. As funções de transferência são dadas por:

$$t^i(\alpha) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{\infty}\mu_t[c_t^i - e_t^i] = 0$$

Logo:

$$t^1(\alpha) = \sum_{t=0}^{\infty}(\alpha_1\beta_1^t + \alpha_2\beta_2^t)[\frac{2\alpha_1\beta_1^t}{\alpha_1\beta_1^t + \alpha_2\beta_2^t} - 1] = \sum_{t=0}^{\infty}(\alpha_1\beta_1^t - \alpha_2\beta_2^t) = \frac{\alpha_1}{1-\beta_1} - \frac{\alpha_2}{1-\beta_2}$$

$$t^2(\alpha) = \sum_{t=0}^{\infty}(\alpha_1\beta_1^t + \alpha_2\beta_2^t)[\frac{2\alpha_2\beta_2^t}{\alpha_1\beta_1^t + \alpha_2\beta_2^t} - 1] = \sum_{t=0}^{\infty}(\alpha_2\beta_2^t - \alpha_1\beta_1^t) = \frac{\alpha_2}{1-\beta_2} - \frac{\alpha_1}{1-\beta_1}$$

Aqui:

$$t^1(\alpha) = 0 \wedge t^2(\alpha) = 0 \implies t^1(\alpha) + t^2(\alpha) = 0$$

Além disso:

$$\frac{\alpha_1}{1-\beta_1} = \frac{\alpha_2}{1-\beta_2}$$

Como α_1 e α_2 são pesos positivos entre 0 e 1 que somam 1 então remos que $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$ portanto:

$$\frac{\alpha_1}{1-\beta_1} = \frac{1-\alpha_1}{1-\beta_2}$$

$$\alpha_1(1-\beta_2) = (1-\alpha_1)(1-\beta_1)$$

$$\alpha_1(1-\beta_2) = 1 - \beta_1 - \alpha_1(1-\beta_1)$$

Portanto nossos pesos α_1 e α_2 podem ser representados em funções dos β_i's tal que:

$$\alpha_1 = \frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}$$

$$\alpha_2 = \frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}$$

Basta substitui-los na nossa função consumo:

$$c_t^1 = \frac{2\frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}\beta_1^t}{\frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}\beta_1^t + \frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}\beta_2^t} = \frac{2(1-\beta_1)(\beta_1^t)}{(1-\beta_1)(\beta_1^2) + (1-\beta_2)(\beta_2^t)} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}\frac{\beta_1^t}{\beta_2^t}}$$

$$c_t^2 = \frac{2\frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}\beta_2^t}{\frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}\beta_1^t + \frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}\beta_2^t} = \frac{2(1-\beta_2)(\beta_2^t)}{(1-\beta_1)(\beta_1^2) + (1-\beta_2)(\beta_2^t)} = \frac{2}{1 + \frac{1-\beta_2}{1-\beta_1}\frac{\beta_2^t}{\beta_1^t}}$$

Por último basta encontrarmos os preços, que aqui são dados por:

$$p_t = \mu_t = (\alpha_1\beta_1^t + \alpha_2\beta_2^t) = \frac{1-\beta_1}{2-\beta_1-\beta_2}\beta_1^t + \frac{1-\beta_2}{2-\beta_1-\beta_2}\beta_2^t$$

$$p_t = \frac{\beta_1^t(1-\beta_1) + \beta_2^t(1-\beta_2)}{2-\beta_1-\beta_2}$$

(d)

Indo primeiro elemento e relembrando os valores para c_0^1 e c_0^2 temos:

$$c_0^1 = \frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}c_0^2$$

Como $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ então temos que:

$$-1 < \beta_1 - 1 < \beta_2 - 1 < 0$$

Multiplicando por -1 temos:

$$1 > 1 - \beta_1 > 1 - \beta_2 > 0$$

Como temos que $1 - \beta_1 > 1 - \beta_2$ então temos que $\frac{1-\beta_1}{1-\beta_2} > 1$ então portanto temos que:

$$c_0^1 > c_0^2$$

Vamos então para o segundo caso e chegar aos limites quando $t \to \infty$ para c_t^1 e c_t^2, primeiro vamos relembrar as formulas que chegamos para ambos:

$$c_t^1 = \frac{\beta_1^t(2-2\beta_1)}{\beta_1^t(1-\beta_1) + \beta_2^t(1-\beta_2)}$$

$$c_t^2 = \frac{\beta_2^t(2-2\beta_2)}{\beta_1^t(1-\beta_1) + \beta_2^t(1-\beta_2)}$$

Podemos modificar algebricamente nossos consumos para os indivíduos $i = 1, 2$ de modo que:

$$c_t^1 = \frac{2}{\frac{\beta_1^t(1-\beta_1)+\beta_2^t(1-\beta_2)}{\beta_1^t(1-\beta_1)}} = \frac{2}{1 + (\frac{\beta_2}{\beta_1})^t(\frac{1-\beta_2}{1-\beta_1})}$$

$$c_t^1 = \frac{2}{\frac{\beta_1^t(1-\beta_1)+\beta_2^t(1-\beta_2)}{\beta_2^t(1-\beta_2)}} = \frac{2}{1 + (\frac{\beta_1}{\beta_2})^t(\frac{1-\beta_1}{1-\beta_2})}$$

Como $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$ então $\frac{\beta_2}{\beta_1} > 1$ e $\frac{\beta_2}{\beta_1} < 1$, portanto:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{\beta_2}{\beta_1} = +\infty$$

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{\beta_1}{\beta_2} = 0$$

Logo para os consumos temos:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} c_t^1 = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{2}{1 + (\frac{\beta_2}{\beta_1})^t (\frac{1-\beta_2}{1-\beta_1})} = \frac{2}{1 + (\frac{1-\beta_2}{1-\beta_1}) \lim_{t \longrightarrow \infty} (\frac{\beta_2}{\beta_1})^t} = 0$$

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} c_t^2 = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{2}{1 + (\frac{\beta_1}{\beta_2})^t (\frac{1-\beta_1}{1-\beta_2})} = \frac{2}{1 + (\frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}) \lim_{t \longrightarrow \infty} (\frac{\beta_1}{\beta_2})^t} = 2$$

(e)

A intuição é relativamente simples, como sabemos que os fatores de impaciência dos indivíduos são diferentes, aonde mais especificamente o parâmetro β do indivíduo 2 é maior que o do individuo 1, temos como implicação que o individuo 1 dá maior peso para o consumo presente que o individuo 2.

Desse modo o individuo 1 realiza trocas com o individuo 2 valorizando mais o consumo presente, mas abre mão do consumo futuro, enquanto o comportamento do individuo 2 faz o inverso. Abaixo temos alguns gráficos que buscam exemplificar:

(f)

De forma algébrica podemos encontrar o momento em que $\hat{c}_t^1 - \hat{c}_t^2$ troca de sinal, essencialmente queremos:

$$\frac{\beta_1^t(2-2\beta_1)}{\beta_1^t(1-\beta_1) + \beta_2^t(1-\beta_2)} = \frac{\beta_2^t(2-2\beta_2)}{\beta_1^t(1-\beta_1) + \beta_2^t(1-\beta_2)}$$

$$\beta_1^t(2-2\beta_1) = \beta_2^t(2-2\beta_2)$$

$$\beta_1^t(1-\beta_1) = \beta_2^t(1-\beta_2)$$

Aplicando log de ambos os lados da igualdade:

$$t\log(\beta_1) + \log(1-\beta_1) = t\log(\beta_2) + \log(1-\beta_2)$$

$$\log(1-\beta_1) - \log(1-\beta_2) = t(\log(\beta_2) - \log(\beta_1))$$

$$t = \frac{\log(1-\beta_1) - \log(1-\beta_2)}{\log(\beta_2) - \log(\beta_1)}$$

Vamos a agora ao algorítimo que encontra o momento. Vamos definir os passos que devemos fazer e em seguida mostrar o algorítimo:

- Definir as funções de consumo c_t^1 e c_t^2;
- Parametrizar β_1 e β_2;
- Definir período inicial $t = 0$;
- Inicializar o `while` com a condição $c_t^1 - c_t^2 > 0$:
  - Enquanto condição não for atendido $t = t + 1$

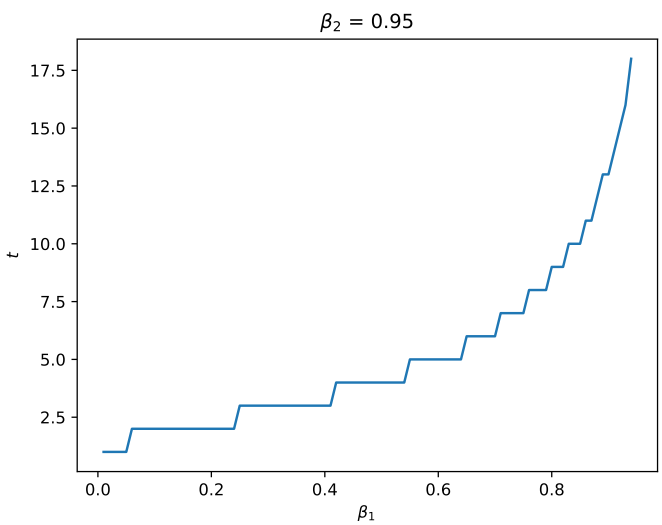

Figura 1: Grafico β_1 x t

Script:

```
# Importanto pacotes
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.backends.backend_pdf import PdfPages

# Funcao Consumo Individuo 1
def c_t_1(t, b1, b2):
  return ((b1**t)*(2-2*b1))/( (b1**t)*(1-b1) + (b2**t)*(1-b2) )

# Funcao Consumo Individuo 2
def c_t_2(t, b1, b2):

  return ((b2**t)*(2-2*b2))/( (b1**t)*(1-b1) + (b2**t)*(1-b2) )

# Parametro Fixado beta 2
b2 = 0.95

# Vetor de Periodos que vamos guardar
t_s  = []
# Range de beta 1 que usaremos
b1_range = [ i/100 for i in range(1,95) ]

# Iteracaio para cada beta 1 poss vel
for b1 in b1_range:
  # Inicializando t em zero
  t = 0
  # loop
  while c_t_1(t,b1,b2) >= c_t_2(t,b1,b2):
      t = t+1

  # Ao fim do loop guardamos os valores dos periodos associados
  t_s.append( t )
# Plot das combinacoes de beta 1 e periodo ate sinais se inverterem
fig2 = plt.figure()
plt.plot( b2_range, t_s )
plt.xlabel( r'$\beta_1$' )
plt.ylabel( r'$t$' )
plt.title(r'$\beta_2$ = 0.95')
plt.show()
```

Problem 2

Considere uma economia com o tempo discreto e infinito, $i.e., t = 0, 1, 2, ...$ Nesta economia vivem duas pessoas de vida eterna indexadas por $i = 1, 2$. Existe um único bem, que é perecível, e cada pessoa tem uma dotação do tipo:

$$e_t^i = \begin{cases} 1, & \text{se } i + t \text{ é par} \\ 0, & \text{se } i + t \text{ é impar} \end{cases}$$

As preferências das pessoas sobre um fluxo de consumo, $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}$, são dadas por:

$$u^i(\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{(c_t^i)^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Em que $0 < \beta < 1$. Toda informação desta economia é pública e não há nenhum risco. Em $t = 0$, antes de receber a dotação, as pessoas se encontram em um mercado central e transacionam unidades do bem de consumo para todos os períodos. Denote por p_t o preço de uma unidade do bem no período t. Em todo $t \geq 1$ as pessoas voltam ao mercado central para executar as trocas negociadas em $t = 0$. Assuma que os acordos feitos no início dos tempos são sempre honrados pelas pessoas.

(a) Defina uma alocação factível para esta economia.

(b) Defina um equilíbrio competitivo (de Arrow-Debreu) para esta economia.

(c) Mostre que em num equilíbrio competitivo a pessoa 2 tem um consumo maior do que a pessoa 1.

(d) Explique a intuição dos resultados demonstrados no item anterior.

(e) Suponha agora que não há um mercado em $t = 0$ em que as pessoas podem transacionar os bens de todos os períodos. Alternativamente, a cada per´ıodo um mercado é aberto em que as pessoas podem trocar bens daquele per´ıodo e um título que promete o pagamento de uma unidade do bem de consumo para o próximo período. Defina um equilíbrio competitivo em mercados sequenciais.

(f) Agora suponha que há um mercado em $t = 0$ e considere um equilíbrio competitivo em mercados sequenciais. Demonstre que, caso não haja condição de não-Ponzi, não existe equilíbrio em mercados sequenciais

Solution

Note que os dois primeiros itens dessa questão são idênticos aos da questão anterior, com a única modificação sendo a função utilidade e que os fatores de impaciência dos consumidores dessa vez são idênticos. Vamos portanto apenas transpor o que já fizemos para essa questão.

(a)

Uma alocação $\{(c_t^1, c_t^2)\}_{t=0}^{\infty}$ é factível se:

1. $$c_t^i \geq 0 \ , \ \forall i \in \{1,2\}, \forall t$$

2. $$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2$$

Ou seja se temos Consumos não negativos para ambos os agentes em todos os períodos e além disso temos a condição de *Market Clearing*, aonde a soma do que é consumido é exatamente a soma das dotações iniciais

(b)

Um equilíbrio competitivo de Arrow-Debreu se dá por dois elementos:

1. Dado um vetor de preços $\{p_t\}_{t=0}^{\infty}$ para $i \in \{1,2\}$, $\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}$ resolve:

$$\max_{\{c_t^i\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{{c_t^i}^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Sujeito à:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t c_t^i \leq \sum_{t=0}^{\infty} \hat{p}_t e_t^i$$

$$c_t^i \geq 0 \ , \ \forall t$$

2. Market Clearing, ou seja:

$$\hat{c}_t^1 + \hat{c}_t^2 = e_t^1 + e_t^2 \ , \ \forall t$$

Definição do equilíbrio é o vetor de consumo, não negativo, que maximiza o fluxo de consumo descontado para ambos os indivíduos e que é factível e "cabe"no orçamento.

(c)

Para mostrar que o consumo da pessoa 2 é maior do que a pessoa 1 precisamos resolver o problema do consumidor, para isso montaremos o o problema de duas formas, a primeira usaremos um lagrangeano de forma direta e da segunda forma usaremos o metodo de Neguishi:

Força Bruta

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{{c_t^i}^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \lambda_i (\sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^i - p_t e_t^i)$$

C.P.O's:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^i} = \beta^t {c_t^i}^{-\sigma} - \lambda_i p_t \implies \lambda_i = \frac{\beta^t}{p_t {c_t^i}^{\sigma}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}^i} = \beta^t {c_{t+1}^i}^{-\sigma} - \lambda_i p_{t+1} \implies \lambda_i = \frac{\beta^{t+1}}{p_t {c_{t+1}^i}^{\sigma}}$$

Igualando os λ_i's para t e $t+1$ temos:

$$\frac{\beta^t}{p_t {c_t^i}^{\sigma}} = \frac{\beta^{t+1}}{p_{t+1} {c_{t+1}^i}^{\sigma}}$$

$$p_{t+1} {c_{t+1}^i}^{\sigma} = \beta p_t {c_t^i}^{\sigma}$$

Usando a igualdade a cima para $t = 0$, $t = 1$, ...:

$$p_1 {c_1^i}^{\sigma} = \beta p_0 {c_0^i}^{\sigma}$$

$$p_2 {c_2^i}^{\sigma} = \beta p_1 {c_1^i}^{\sigma} = \beta^2 p_0 {c_0^i}^{\sigma}$$

$$\vdots$$

$$p_t {c_t^i}^{\sigma} = \beta^t p_0 {c_0^i}^{\sigma}$$

Assumindo que $p_0 = 1$ [3],

$$p_t {c_t^i}^{\sigma} = \beta^t {c_0^i}^{\sigma}$$

$$p_t = \beta^t (\frac{c_0^i}{c_t^i})^{\sigma}$$

[3] Novamente aqui estamos normalizando os preços em $t = 0$ para 1

Como a igualda vale para ambos os indivíduos temos podemos igualar para $i = 1$ e $i = 2$, logo:

$$\beta^t(\frac{c_0^1}{c_t^1})^\sigma = \beta^t(\frac{c_0^2}{c_t^2})^\sigma$$

$$\frac{c_0^1}{c_t^1} = \frac{c_0^2}{c_t^2}$$

$$c_t^2 = \frac{c_0^2}{c_0^1}c_t^1$$

Usando a condição de *Market-clearing* temos:

$$c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = 1$$

$$c_t^1 + \frac{c_0^2}{c_0^1}c_t^1 = \frac{c_0^1 c_t^1 + c_0^2 c_t^1}{c_0^1} = \frac{c_t^1(c_0^1 + c_0^2)}{c_0^1} = \frac{c_t^1}{c_0^1} = 1 \implies c_t^1 = c_0^1$$

Portanto:

$$c_t^2 = c_0^2$$

Como temos que os consumos são constantes podemos calcular p_t:

$$p_t = \beta^t(\frac{c_0^i}{c_t^i})^\sigma = \beta^t$$

Usando as restrições orçamentarias podemos colocar c_t^1 e c_t^2 em termos de β.

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^1 = \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^1$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_0^1 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t e_t^1$$

$$\frac{c_0^1}{1-\beta} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t e_t^1$$

Focando em abrir a parte da direita precisamos focar em ver o fluxo de dotações do individuo 1, vemos que o individuo 1 recebe dotação $e_t^1 = 1$ apenas quando $i + t$ é par, portanto:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t e_t^1 = 0 + \beta + 0 + \beta^2 + 0 + \beta^4 + ...$$

$$= \beta + \beta^2 + \beta^4 + ... = \beta(1 + \beta^2 + \beta^4 + ...) = \frac{\beta}{1 - \beta^2}$$

Portanto:

$$\frac{c_0^1}{1 - \beta} = \frac{\beta}{1 - \beta^2}$$

$$c_t^1 = c_0^1 = \frac{\beta(1 - \beta)}{(1 + \beta)(1 - \beta)} = \frac{\beta}{1 + \beta}$$

Realizando o mesmo procedimento para o individuo 2 teremos:

$$\sum_{t=0}^{\infty} p_t c_t^2 = \sum_{t=0}^{\infty} p_t e_t^2$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_0^2 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t e_t^2$$

$$\frac{c_0^2}{1 - \beta} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t e_t^2$$

Abrindo o lado direito, pegamos e olhamos para como as dotações para o individuo dois são distribuídas no tempo, e aqui vemos que:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t e_t^2 = 1 + 0 + \beta^2 + 0 + \beta^4 + ...$$

$$= 1 + \beta^2 + \beta^4 + ... = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

Portanto:

$$\frac{c_0^2}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$c_t^2 = c_0^2 = \frac{1 - \beta}{(1 + \beta)(1 - \beta)} = \frac{1}{1 + \beta}$$

Como $0 < \beta < 1$ fica claro que temos que $c_t^2 > c_t^1$ para todo t.

Metodo de Negishi

Aqui da mesma forma resolveremos o exercício da mesma forma que feito no exercício 1, montaremos o problema como um planejador central que pondera as utilidades do individuo 1 e 2 usando os pesos α_1 e α_2.

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\alpha_1 \frac{(c_t^1)^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \alpha_2 \frac{(c_t^2)^{1-\sigma}}{1-\sigma}) - \frac{\mu_t}{2}[c_t^1 + c_t^2 - 1]$$

Tirando as condições de primeira ordem teremos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^1} = \frac{\beta^t \alpha_1}{(c_t^1)^\sigma} - \frac{\mu_t}{2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t^2} = \frac{\beta^t \alpha_2}{(c_t^2)^\sigma} - \frac{\mu_t}{2} = 0$$

Igualando $\mu_t/2$ teremos:

$$\frac{\beta^t \alpha_1}{(c_t^1)^\sigma} = \frac{\beta^t \alpha_2}{(c_t^2)^\sigma}$$

$$(\frac{c_t^1}{c_t^2})^\sigma = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

$$c_t^1 = (\frac{\alpha_1}{\alpha_2})^{1/\sigma} c_t^2$$

Substituindo na restrição orçamentária em t teremos:

$$(\frac{\alpha_1}{\alpha_2})^{1/\sigma} c_t^2 + c_t^2 = 1$$

teremos de forma respectiva:

$$c_t^2 = \frac{\alpha_2^{1/\sigma}}{\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma}}$$

$$c_t^1 = \frac{\alpha_1^{1/\sigma}}{\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma}}$$

Encontrado os consumos vamos encontrar μ_t:

$$\frac{\mu_t}{2} = \frac{\beta^t \alpha_1}{1} \frac{(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})^\sigma}{\alpha_1} = \beta^t (\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})^\sigma$$

$$\mu_t = 2\beta^t (\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})^\sigma$$

Encontrados os consumos e μ_t vamos as funções de transferência, dadas por:

$$\sum_{i=1}^{2} t^i(\alpha) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=0}^{\infty} \mu_t[c_t^i - e_t^i] = 0$$

Para o individuo 1 teremos:

$$t^1(\alpha) = \sum_{t=0}^{\infty} \mu_t[c_t^1 - e_t^1] = \sum_{t=0}^{\infty} 2\beta^t(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})^\sigma[\frac{\alpha_1^{1/\sigma}}{\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma}} - e_t^1]$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} 2\beta^t(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})^\sigma \frac{\alpha_1^{1/\sigma} - e_t^1(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})}{\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma}}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} 2\beta^t(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})^{\sigma-1}[\alpha^{1/\sigma} - e_t^1(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})]$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t[2\alpha_1^{1/\sigma}(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})^{\sigma-1} - 2e_t^1(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})^\sigma]$$

Como é o individuo 1 temos que ele recebe a dotação e_t^1 em períodos intercalados quando $1+t$ é par, ou seja ele recebe a partir do momento $t=1$, logo:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t e_t^1 = 0 + \beta + 0 + \beta^3 + 0 + \beta^5 + ...$$

$$= \beta + \beta^3 + \beta^5 + ... = \beta[1 + \beta^2 + \beta^4 + ...]$$

$$= \beta[(\beta^2)^0 + (\beta^2)^1 + (\beta^2)^2 + ...] = \frac{\beta}{1-\beta^2}$$

Portanto se voltarmos a nossa operação relacionado as funções de transferência teremos:

$$= \frac{2}{1-\beta}[\alpha_1^{1/\sigma}(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})^{\sigma-1}] - \frac{2\beta}{1-\beta^2}[(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})^\sigma] = 0$$

Logo:

$$\frac{2}{1-\beta}[\alpha_1^{1/\sigma}(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})^{\sigma-1}] = \frac{2\beta}{1-\beta^2}[(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})^\sigma]$$

$$\frac{\alpha_1^{1/\sigma}}{1-\beta} = \frac{\beta}{1-\beta^2}(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})$$

$$\alpha_1^{1/\sigma}(1-\beta^2) = (\beta - \beta^2)(\alpha_1^{1/\sigma} + \alpha_2^{1/\sigma})$$

$$\alpha_1^{1/\sigma}(1-\beta^2) = \alpha_1^{1/\sigma}(\beta - \beta^2) + \alpha_2^{1/\sigma}(\beta - \beta^2)$$

$$\alpha_1^{1/\sigma}(1-\beta^2)-\alpha_1^{1/\sigma}(\beta-\beta^2)=\alpha_2^{1/\sigma}(\beta-\beta^2)$$

$$\alpha_1^{1/\sigma}(1-\beta)=\alpha_2^{1/\sigma}\beta(1-\beta)$$

$$\alpha_1^{1/\sigma}=\alpha_2^{1/\sigma}\beta$$

Isolando $\alpha_1^{1/\sigma}$ temos:

$$\alpha_1=\beta^\sigma\alpha_2$$

Dado que $\alpha_1+\alpha_2=1$ então

$$\beta^\sigma\alpha_2+\alpha_2=1 \implies \alpha_2=\frac{1}{1+\beta^\sigma}$$

Assim teremos que α_1 será:

$$\alpha_1=\frac{\beta^\sigma}{1+\beta^\sigma}$$

Com os pesos calculados vamos a estimação de c_t^1 e c_t^2:

$$c_t^1=\frac{\alpha_1^{1/\sigma}}{\alpha_1^{1/\sigma}+\alpha_2^{1/\sigma}}=\frac{(\frac{\beta^\sigma}{1+\beta^\sigma})^{1/\sigma}}{(\frac{\beta^\sigma}{1+\beta^\sigma})^{1/\sigma}+(\frac{1}{1+\beta^\sigma})^{1/\sigma}}=\frac{\beta}{1+\beta}$$

$$c_t^2=\frac{\alpha_2^{1/\sigma}}{\alpha_1^{1/\sigma}+\alpha_2^{1/\sigma}}=\frac{(\frac{1}{1+\beta^\sigma})^{1/\sigma}}{(\frac{\beta^\sigma}{1+\beta^\sigma})^{1/\sigma}+(\frac{1}{1+\beta^\sigma})^{1/\sigma}}=\frac{1}{1+\beta}$$

Encontrado os consumos c_t^1 e c_t^2, vamos encontrar μ_t

$$\mu_t=2\beta^t(\alpha_1^{1/\sigma}+\alpha_2^{1/\sigma})$$

Substituindo os α_1 e α_2 teremos:

$$\mu_t=2\beta^t((\frac{\beta^\sigma}{1+\beta^\sigma})^{1/\sigma}+(\frac{1}{1+\beta^\sigma})^{1/\sigma})=2\beta^t\frac{1+\beta}{(1+\beta^\sigma)^{1/\sigma}}$$

Por último vamos encontrar os preços. Temos aqui que:

$$\frac{\mu_t}{2}=\lambda_i p_t$$

$$\frac{\mu_t}{2p_t}=\lambda_i$$

Portanto igualando os lambdas para um mesmo individuo teremos:

$$\frac{\mu_t}{2p_t} = \frac{\mu_{t+1}}{2p_{t+1}}$$

$$\frac{\beta^{t+1}\alpha_1}{p_{t+1}c^1_{t+1}} = \frac{\beta^t\alpha_1}{p_t c^1_t}$$

$$\frac{\beta^{t+1}\alpha_1}{p_{t+1}} = \frac{\beta^t\alpha_1}{p_t}$$

$$p_{t+1} = \beta\frac{\alpha_1}{\alpha_1}p_t = \beta p_t$$

Portanto:

$$p_t = \beta^t$$

(d)

A intuição acaba sendo relativamente simples, apesar dos indivíduos possuírem a mesma função utilidade e o mesmo fator de desconto, o que acaba fazendo com o que o individuo dois tenha um consumo maior e constante em todo período é o fato de que ele recebe a dotação inicial em $t = 0$ enquanto o individuo dois não, portanto o individuo dois possui um certo poder, enquanto isso o individuo 1 troca todo seu consumo futuro por um pouco a mais de consumo presente.

(e)

Aqui simplesmente queremos definir um equilíbrio competitivo em mercados sequências, podemos pegar a definição em Krueger (2017) Cap. 2 *pgs. 22 à 23*, um equilíbrio em mercados sequenciais é definido como:

Um equilíbrio em mercados sequenciais são alocações $\{(c^i_t, a^i_t)\}$ e taxas de juros $\{r_{t+1}\}^\infty_{t=0}$ tais que:

1. Para $i = 1, 2$ dada taxa de juros $\{r_{t+1}\}^\infty_{t=0}$, $\{\hat{c}^i_t, \hat{a}^i_t\}^\infty_{t=0}$ resolve:

$$\max_{\{\hat{c}^i_t,\hat{a}^i_t\}^\infty_{t=0}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c^i_t)$$

Sujeito à:

$$c^i_t + \frac{a^i_{t+1}}{1+\hat{r}_{t+1}} \leq e^i_t + a^i_t$$

$$c_t^i \geq 0 \ , \forall t$$

$$a_{t+1}^i \geq -\bar{A}^i$$

2. Para todo $t \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{2} c_t^i = \sum_{i=1}^{2} e_t^i$$

$$\sum_{i=1}^{2} \hat{a}_{t+1}^i = 0$$

(f)

Vamos demonstrar que a condição de *Non-Ponzi* é necessária para o equilíbrio em mercados sequenciais, o trecho dessa prova foi tirado de Krueger (2017) Cap. 2 *pgs. 24 à 27*.

O principal que queremos mostrar é que se uma alocação forma um equilíbrio de *Arrow debreu* então também é uma alocação de mercados sequenciais e vice-versa, como uma cabe na outra então são equivalentes.

Referências

Krueger, D. (2017). *Macroeconomic Theory*. University of Pennsylvania. (Ver pp. 2, 3, 20, 21).