Lista 3
Macroeconomia I

Yuri Passuelo – yuripassuelo@usp.br

12 de maio de 2025

Resolução dos exercícios da primeira lista da disciplinas de Macroeconomia I.

Problem 1

Seja $X \subset \mathcal{R}^n$ e $S = C(X)$ o conjunto de todas as funções contínuas e limitadas em X com a norma do sup: $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ mostre que $(S, ||.||)$ é um espaço de Banach.

Solution

Vamos a primeira etapa que consiste basicamente em revisar as definições que utilizaremos para demonstrar/provar.

O que queremos provar basicamente é que S é a definição de um espaço de *Banach*:

Definição (Espaço de *Banach*): Seja $X \subset \mathbb{R}^l$ e seja $C(X)$ o conjunto de funções contínuas e limitadas em X, $f : X \to \mathbb{R}$, com a norma do sup $||f|| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. Então $C(X)$ é um espaço vetorial normado completo (espaço de Banach).

Portanto para que nosso espaço seja um espaço de Banach basta que seja um espaço normado e que seja um espaço completo. Vamos as definições de espaço normado e completo.

Definição (Espaço de vetorial): Um espaço vetorial normado é um espaço vetorial S de uma norma $||.|| : S \to \mathbb{R}$, tal que $\forall x, y \in S$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(a) $||x|| \geq 0$, com igualdade se e somente se $x = y$;

(b) $||\alpha x|| = |\alpha|.||x||$; e

(c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (desigualdade triangular).

Definição (Espaço Completo): Um espaço métrico (S, ρ) é completo se toda sequência de Cauchy em S converge para um elemento em S.

Em notação matemática:

$$\forall f_n \in S(f_n \text{ é Cauchy} \implies \exists f(f \in S \wedge f_n \to f))$$

$$\exists f \in S(\forall \varepsilon > 0(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}(||f_n - f|| < \varepsilon)))$$

Obs: O que significa é que toda sequência convergente que está dentro desse espaço converge para um elemento dentro desse espaço, como nosso espaço é S, ou seja o conjunto de todas as funções continuas e limitadas com domínio em $X \subset \mathbb{R}^n$, então temos que toda sequência de funções continuas em limitadas vai convergir para uma função continua e limitada.

Estratégia de Prova:

(1) Provar que S com norma do sup, é espaço vetorial normado

(2) Provar que S é completo

(3) $(1) \wedge (2) \implies S$ é espaço de Banach

Vamos a solução, começaremos com (1): Queremos provar que S com normal do sup é um espaço vetorial e portanto:

1. $\forall x \in S \forall \alpha \in \mathbb{R}(||x|| \geq 0)$
2. $\forall x \in S(\forall \alpha > 0(||\alpha x|| = |\alpha|.||x||))$
3. $\forall x \in S(\forall y \in S(||x + y|| \leq ||x|| + ||y||))$

1. Tome x arbitrário, note que usando a definição de norma de Madureira (2013) temos que $\forall X \in S(\forall t \in X(|x(t)| \geq 0))$.

Dada essa definição temos portanto que $|x(t)|$ se trata de um conjunto de valores positivos e portanto o supremo da norma de igual forma terá um valor positivo.

$$\sup_{t \in X} |x(t)| \geq 0$$

Caso tenhamos $\forall t \in X(x(t) = 0)$

$$\sup_{t \in X} |x(t)| = 0$$

Portanto a primeira condição é provada de forma simples.

2. Agora vamos ao segundo caso. Nesse caso temos que usar novamente as definições e teoremas de Madureira (2013).

Aqui vamos tomar x arbitrário tal que $x \in S$, vamos tomar agora α arbitrário tal que $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha > 0$, nos resta provar que:

$$||\alpha.x|| = |\alpha|.||x||$$

Assim temos que usando a definição 2.2.5 ítem (2) de norma do Madureira (2013):

$$\sup_{t \in X} |\alpha x(t)| = \sup_{t \in X} |\alpha|.|x(t)|$$

$$\sup_{t \in X} |\alpha|.|x(t)| \leq \sup_{t \in X} |\alpha|. \sup_{t \in X} |x(t)| = |\alpha| \sup_{t \in X} |x(t)|$$

Como $\sup_{t \in X} |\alpha| = |\alpha|$, ou seja, estamos calculando o supremo de uma constante e portanto o supremo de uma constante é a própria constante, então temos que a seguinte expressão vale com igualdade e portanto:

$$\sup_{t \in X} |\alpha|.|x(t)| = \sup_{t \in X} |\alpha|. \sup_{t \in X} |x(t)| = |\alpha| \sup_{t \in X} |x(t)|$$

Portanto:

$$\sup_{t \in X} |\alpha x(t)| = |\alpha| \sup_{t \in X} |x(t)|$$

Vamos agora ao último ponto que é demonstrar a validade da desigualdade triangular. vamos voltar a expressão lógica:

Primeiramente tomaremos x e y arbitrários tais que $x \in S$ e $y \in S$

$$\sup_{t \in X} |x(t) + y(t)|$$

Pela definição s^* é supremo de A se:

$$\forall x \in A(s^* \geq x)$$

E dado S o conjunto de cotas superiores do conjunto x temos que

$$\exists v \in \mathbb{R}(\forall x \in A(x \leq v) \implies s^* \leq v)$$

Dadas as definições podemos pegar como exemplo o Lema 2.1.6 de Madureira (2013) temos que:

$$\forall x \in S(x(t) \leq \sup_{t \in X} |x(t)|)$$

$$\forall y \in S(y(t) \leq \sup_{t \in X} |y(t)|)$$

Podemos combinar as expressões somando-as e ter que:

$$\forall x, y \in S(x(t) + y(t) \leq \sup_{t \in X} |x(t)| + \sup_{t \in X} |y(t)|)$$

Como a expressão é valida para quaisquer $x, y \in S$ então vale inclusive para $\sup_{t \in X} |x(t) + y(t)|$, portanto:

$$\forall x, y \in S(\sup_{t \in X} |x(t) + y(t)| \leq \sup_{t \in X} |x(t)| + \sup_{t \in X} |y(t)|)$$

Portanto é valida a expressão da desigualdade triangular.

Provamos acima a validade de que temos um espaço vetorial normado, resta agora provar que nosso espaço vetorial é completo, ou seja:

$$\forall f_n \in S(f_n \text{ é Cauchy } \implies \exists f(f \in S \wedge f_n \to f))$$

Essa prova é ligeiramente mais complicada, vamos relembrar primeiros alguns elementos aqui.

Definição (Sequência de Cauchy): Uma sequência de Cauchy é:

$$\forall \varepsilon > 0(\exists K^* \in \mathbb{N}(\forall k \geq K^*(\forall m \geq K^*(|x_k - x_m| \leq \varepsilon))))$$

Para todo ε arbitrário positivo existe um momento K^* tal que para qualquer dois momentos k, m posteriores a K^*, a norma da diferença desses momentos $|x_k - x_m|$ é menor que ε. Ou seja implica que uma sequência de Cauchy é uma sequência em que as distancias entre os elementos estão diminuindo cada vez mais que se avança na sequência.

Vamos provar que o mesmo é completo em três passos:

1. Primeiro vamos pegar uma sequência candidata f_n
2. Vamos mostrar que f_n converge pela norma do sup para f
3. Mostrar que $f \in S$ (Limitada e continua)

Primeiro passo:

Tome f_n uma sequência arbitrária tal que $f_n \in S$, ou seja, temos que f_n é uma sequência de funções tal que f_n é continua e limitada. Vamos também supor que nossa sequência f_n é de Cauchy, assim temos que:

- f_n é continua
- f_n é limitada
- $$\forall x \in X(\forall \varepsilon > 0(\exists K^* \in \mathbb{N}(\forall k \geq K^*(\forall m \geq K^*(|f_k(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon)))))$$

Obs: Aqui nosso Goals temos que ficamos com $\exists f(f \in S \wedge f_n \to f)$, ou seja temos que provar que f é:

- $\forall \varepsilon > 0(\exists \delta > 0(\forall y \in X(|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)))$ (Continua)
- $\exists M \in \mathbb{N}(\forall x \in X(f(x) \leq M))$ (Limitada)
- $\forall \varepsilon > 0(\exists K^* \in \mathbb{N}(\forall k \geq K^*(|f_n - f| \leq \varepsilon)))$ (Limite de f_n)

Segundo Passo:

Vamos usar instanciação existencial, seja f uma função, nos resta mostrar que nossa sequência f_n converge para f e que $f \in S$, primeiro vamos focar aqui na convergência.

Obs: Temos que f_n é sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e temos que $\mathbb{R}$ é um espaço completo, isso nos diz portanto que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ em $\mathbb{R}$

Tome x arbitrário tal que $x \in X$, tomar ε arbitrário tal que $\varepsilon > 0$, e seja $K^* \in \mathbb{N}$ e tome $k, m \geq K^*$, assim temos que:

Obs: Como temos que usando o fato de que $f_m \to f$ em $\mathbb{R}$, podemos pegar m tal que $|f_m - f| < \varepsilon/2$

$$|f_k - f_m| < \varepsilon$$

Anteriormente mostramos que para a norma do sup temos que a desigualdade triangular é valida e portanto:

$$|f_n(x) - f(x)| = |(f_n(x) - f_m(x)) - (f(x) - f_m(x))| = |(f_n(x) - f_m(x)) + (f_m(x) - f(x))|$$

Usando a desigualdade triangular chegamos que:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x))|$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x))| \leq \sup_{t\in X} |f_n(t) - f_m(t)| + |f_m(x) - f(x)|$$

Sabemos que $\sup\limits_{t\in X}|f_n(t)-f_m(t)|\leq\varepsilon$, portanto:

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon+|f_m(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+|f_m(x)-f(x)|$$

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon+|f_m(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+|f_m(x)-f(x)|\leq\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

Portanto temos que $f_n\to f$ e portanto mostramos que f_n nossa sequência arbitrária converge para f. Nos resta agora provar que $f\in S$

Terceiro Passo:

Para provar que $f\in S$ temos que mostrar que é f é limitada e continua. Primeiro vamos nos concentrar em mostrar que f é limitada, aqui queremos provar que:

$$\exists M\in\mathbb{N}(\forall x\in X(f(x)\leq M))$$

Temos que f_n é uma sequência de funções limitadas e portanto:

$$\exists M_n\in\mathbb{N}(\forall x\in X(f_n(x)\leq M_n))$$

Seja $M_n\in\mathbb{N}$ tal que $\forall x\in X(f_n(x)\leq M_n)$:

$$\forall x\in X(f_n(x)\leq M_n)\implies\sup_{t\in X}|f_n(t)|\leq M_n$$

Assim temos:

$$|f|=\sup_{t\in X}|f(t)|=\sup_{t\in X}|f(t)-f_n(t)+f_n(t)|$$

Usando a desigualdade triangular:

$$|f|=\sup_{t\in X}|f(t)|=\sup_{t\in X}|f(t)-f_n(t)+f_n(t)|\leq\sup_{t\in X}|f(t)-f_n(t)|+\sup_{t\in X}|f_n(t)|$$

Como $\forall x\in X(f_n(x)\leq M_n)$ então

$$|f|=\sup_{t\in X}|f(t)|\leq\sup_{t\in X}|f(t)-f_n(t)|+\sup_{t\in X}|f_n(t)|\leq\sup_{t\in X}|f(t)-f_n(t)|+M_n$$

Como $|f_n-f|\leq\varepsilon$

$$|f|=\sup_{t\in X}|f(t)|\leq\sup_{t\in X}|f(t)-f_n(t)|+\sup_{t\in X}|f_n(t)|\leq\sup_{t\in X}|f(t)-f_n(t)|+M_n\leq\varepsilon+M_n$$

Logo:

$$|f| = \sup_{t \in X} |f(t)| \leq \varepsilon + M_n$$

Portanto seja $M = M_n + \varepsilon$ e para todo $x \in X$ teremos:

$$f(x) \leq M_n + \varepsilon = M$$

Mostramos que f é limitado basta provar agora que f é função continua:

$$\forall \varepsilon > 0 (\exists \delta > 0 (\forall y \in X (|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)))$$

Assim:

- Tomamos $\varepsilon > 0$
- Instânciamos $\delta > 0$ tal que $|x - y| \leq \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$
- tomamos y arbitrário
- Supomos que $|x - y| \leq \delta$
- Usar $n > N_\varepsilon$ tal que $|f_n - f| \leq \varepsilon/3$ (Possível pois $f_n \to f$

Vamos usar o fato de $f_n \to f$ e a desigualdade triangular para mostrar que:

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) + f_n(y) - f_n(y) - f(y)|$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

$$\leq \sup_{t \in X} |f_n(t) - f(t)| + |f_n(x) - f_n(y)| + \sup_{t \in X} |f_n(t) - f(t)|$$

Como usamos $\delta > 0$ tal que $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon/3$ n e selecionamos n tal que $|f_n - f| \leq \varepsilon/3$ então

$$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Portanto:

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Logo a função é continua. Por fim provamos que f_n converge para f e que além disse $f \in S$, ou seja é limitada e continua. Como (S, ρ) era também espaço vetorial, então temos um espaço vetorial completo

Problem 2

Considere a equação funcional associada ao problema do planejador do modelo de crescimento neoclássico

$$v(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{U(f(k) - k') + \beta v(k')\}$$

em que $\beta \in (0, 1)$, U e f são funções contínuas, estritamente crescentes e limitadas. Mostre que o operador $T : C(X) \to C(X)$ dado por

$$(Tv)(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{U(f(k) - k') + \beta v(k')\}$$

é uma β contração.

Solution

A estratégia de prova desse exercício basicamente envolve invocar o Teorema de Blackwell de condições suficientes para uma beta contração, ou seja, usando a definição:

Definição (*Blackwell*): Seja $X \subset R^l$ e seja $B(X)$ o espaço de funções contínuas e limitadas em X, $f : X \to R$, com a norma do sup $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. O operador $T : B(X) \to B(X)$ é uma contração de módulo β se satisfaz:

(a) Monotonicidade: para quaisquer $f, g \in B(X)$ então:

$$\forall x \in X(f(x) \geq g(x) \implies (Tf)(x) \geq (Tg)(x))$$

(b) Desconto:

$$\forall f \in B(X)(\forall x \in X(\forall a > 0([T(f + a)](x) \leq (Tf)(x) + \beta a)))$$

Portanto a estratégia de prova consiste em:

(a) Demonstrar a propriedade de Monotonicidade

(b) Demonstrar a propriedade de Desconto

(c) Invocar o teorema das condições suficientes de *Blackwell* provar por fim que se trata de uma beta contração

Vamos aqui para a solução:

Para a propriedade de Monotonicidade queremos que provar que:

$$\forall f, g \in B(X)(\forall x \in X(f(x) \geq g(x) \implies (Tf)(x) \geq (Tg)(x)))$$

Tome funções f e g arbitrárias tal que $\forall x \in X(f(x) \geq g(x))$, tome x arbitrário tal que $x \in X$. Como $f(x) \geq g(x)$ então

$$(Tf)(x) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{U(c) + \beta f(k')\} \geq \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{U(c) + \beta g(k')\} = (Tg)(x)$$

Obs: Aqui os argumentos $U(c)$ das funções são iguais dentro do maximando, agora os segundos termos $\beta f(k')$ e $\beta g(k')$ serão diferentes, como temos que $\forall x \in X(f(x) \geq g(x))$ então o maximando em relação à $f(x)$ é maior que o maximando em relação à $g(x)$.

Portanto

$$(Tf)(x) \geq (Tg)(x)$$

Portanto temos que a condição de monotonicidade é atendida.

Agora vamos a condição de desconto: Primeiro vamos ao operador

$$(Tv)(k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{U(f(k) - k') + \beta v(k')\}$$

O que acontece com o operador T quando somamos uma constante a na função?

$$[T(v + a)](k) = \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{U(f(k) - k') + \beta[v(k') + a]\}$$

$$= \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{U(f(k) - k') + \beta v(k') + \beta a\}$$

$$= \max_{0 \leq k' \leq f(k)} \{U(f(k) - k') + \beta v(k')\} + \beta a$$

$$= (Tv)(x) + \beta a$$

Portanto:

$$[T(v + a)](x) = (Tf)(x) + \beta a$$

Como temos atendidas as condições de monotonicidade e de desconto, pelo teorema das condições suficientes de Blackwell, temos que o operador T é uma beta contração

Problem 3

Seja $C[a,b]$ o espaço das funções reais contínuas definidas em $[a,b]$, com a norma do máximo:

$$\forall(u \in C[a,b])(||u|| = \max_{t\in[a,b]} |u(t)|)$$

Seja o operador $T : C[a,b] \to C[a,b]$ tal que $\forall u C[a,b]$,

$$T(u)(t) = \int_a^t u(s)ds \; \forall t \in [a,b]$$

Mostre que, se $b - a < 1$, T tem exatamente um único ponto fixo em $(C[a,b], ||.||)$. Dica: Mostre que $T : C[a,b] \to C[a,b]$. Você pode fazer isso tomando uma sequência $t^n \to t$ e mostrar que $T(u)(t^n) \to T(u)(t)$. Depois basta mostrar que T satisfaz as condições de Blackwell para uma contração.

Solution

A dica já nos diz quase tudo que devemos saber do problema, a única diferença é que estamos em um ambiente continuo, e portanto não é de grande diferença.

Vamos primeiro mostrar a questão da convergência. Aqui queremos analisar se quando $t^n \to t$ temos que nosso operador T também converge de modo que $T(u)(t^n) \to T(u)(t)$, como $t \in [a,b]$, teremos que pegar um t arbitrário, e a partir de nossa sequência teremos duas opções, a primeira é que nossa sequência $t^n > t$ e em outra possibilidade $t^n < t$. Vamos analisar ambos os casos:

Caso 1: $t^n > t$

Podemos representar nosso operador nesse caso como:

$$T(u)(t^n) = \int_a^{t^n} u(s)ds = \int_a^t u(s)ds - \int_t^{t^n} u(s)ds$$

Assim a medida que $t^n \to t$ temos que o segundo termo

$$\int_t^{t^n} u(s)ds \to 0$$

Portanto:

$$T(u)(t^n) = \int_a^{t^n} u(s)ds \to \int_a^t u(s)ds = T(u)(t)$$

Caso 2: $t^n < t$

Podemos representar nosso operador nesse caso como:

$$T(u)(t^n) = \int_a^{t^n} u(s)ds = \int_a^t u(s)ds + \int_t^{t^n} u(s)ds$$

Assim a medida que $t^n \to t$ temos que o segundo termo

$$\int_t^{t^n} u(s)ds \to 0$$

Portanto:

$$T(u)(t^n) = \int_a^{t^n} u(s)ds \to \int_a^t u(s)ds = T(u)(t)$$

Dessa forma temos que conforme a sequência $t^n \to t$ nosso operador Tu também converge.

Vamos agora demonstrar que nosso operador atende as condições do teorema de Blackwell e portanto é uma beta contração:

(a)

Primeiro vamos a característica de monotonicidade, ou seja queremos provar que:

$$\forall f, g \in B(X)(\forall x \in X(f(x) \geq g(x) \implies T(f)(x) \geq T(g)(x)))$$

Tome funções f e g arbitrárias tal que $\forall x \in X$, tome x arbitrário tal que $x \in X$. Como $f(x) \geq g(x)$ então

$$T(f)(x) = \int_a^x f(s)ds \geq \int_a^x g(s)ds = T(g)(x)$$

Aqui é simples, temos que a integral definida sobre o intervalo $[a, b]$ é uma função monotônica, e portanto teremos que:

$$T(f)(x) \geq T(g)(x)$$

Portanto temos que atende a condição de monotonicidade.

(b)

Agora a segunda propriedade do desconto que implica simplesmente em:

$$[T(u+c)](x) = \int_a^x (u+c)(s)ds = \int_a^x (u(s)+c)ds = \int_a^x u(s)ds + (x-a)c$$

$$\leq \int_a^x u(s)ds + (b-a)c = [T(u+c)](x) + (b-a)c$$

Portanto temos que atende a condição de desconto.

Problem 4

Considere o seguinte problema sequencial:

$$v^*(k) = \max_{c_t, k_{t+1}, k_{1,t}, k_{2,t}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Sujeito á:

$$0 \leq c_t \leq f_1(k_{1,t}) \ \forall t = 0, 1, ...$$

$$0 \leq k_{t+1} \leq f_2(k_{2,t}) \ \forall t = 0, 1, ...$$

$$k_{1,t} + k_{2,t} \leq k_t \ \forall t = 0, 1, ...$$

$$k_0 > 0$$

onde f_1 e f_2 são funções contínuas, estritamente crescentes e tais que $f_1(0) = f_2(0) = 0$ e $u()$ e contínua e limitada em $\mathbb{R}_+$.

(a) Monte a equação de Bellman associada a este problema.

(b) Mostre que o operador de Bellman associado a este problema possui um único ponto fixo. Você pode assumir que a correspondência

$$\Gamma(k) = \{(c, k) \in \mathbb{R}^2_+; 0 \leq c_t \leq f_1(k_1), 0 \leq k \leq f_2(k_2), k_1 + k_2 \leq k\}$$

satisfaz as condições do teorema do máximo.

(c) Argumente que se v e ponto fixo do operador de Bellman no espaço das funções contínuas e limitadas, então $v = v^*$.

Solution

(a)

Montar a equação de Bellman desse problema não é necessariamente difícil, a diferença que temos aqui são dois tipos de capital e duas produções diferentes, em resumo, k_1 é o capital destinado a produção de bens de consumo e k_2 destinado aos bens de capital.

$$v(k_t) = \max_{c_t, k_{t,1}, k_{t,2}, k_{t+1}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right\} = \max_{c_t, k_{t,1}, k_{t,2}, k_{t+1}} \left\{ u(c_0) + \beta u(c_1) + \beta^2 u(c_2) + ... \right\}$$

$$= \max_{c_t,k_{t,1},k_{t,2},k_{t+1}} \left\{ u(c_0) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right\} = \max_{c_t,k_{t,1},k_{t,2},k_{t+1}} \left\{ u(c_0) + \beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{t+1}) \right\}$$

$$= \max_{c_0,k_{0,1},k_{0,2},k_1} \left\{ u(c_0) + \max_{c_t,k_{t,1},k_{t,2},k_{t+1}} \left\{ \beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{t+1}) \right\} \right\}$$

$$= \max_{c_0,k_{0,1},k_{0,2},k_1} \left\{ u(c_0) + \beta \max_{c_t,k_{t,1},k_{t,2},k_{t+1}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{t+1}) \right\} \right\}$$

Dado que temos que $v(k_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$ de forma semelhante se pegarmos o subscrito t e adicionarmos um período teremos $v(k_{t+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_{t+1})$ logo substituindo teremos:

$$v(k_0) = \max_{c_0,k_{0,1},k_{0,2},k_1} \{u(c_0) + \beta v(k_1)\}$$

Tirando os indexadores temporais temos:

$$v(k) = \max_{c,k_1,k_2,k'} \{u(c) + \beta v(k')\}$$

Sujeito à:

$$c \leq f_1(k_1)$$

$$k' \leq f_2(k_2)$$

$$k_1 + k_2 \leq k$$

$$c, k_1, k_2, k' \geq 0$$

(b)

Como estamos tratando de um problema que

Para isso vamos usar o teorema das condições suficientes de Blackwell, para isso nosso problema deve atender duas condições:

- Monotonicidade
- Desconto

Primeiro vamos a Monotonicidade:

$$f(k) = \max_{c,k_1,k_2,k'} \{u(c) + \beta f(k')\} \leq \max_{c,k_1,k_2,k'} \{u(c) + \beta f(k')\} = g(k)$$

Vamos agora ao Desconto, aqui basta pegar nosso operador sobre a função valor $(Tv)(k)$ e adicionar uma constante a:

$$T(v+a)(k) = \max_{c,k_1,k_2,k'} \{u(c) + \beta(v+a)(k')\}$$

$$= \max_{c,k_1,k_2,k'} \{u(c) + \beta v(k') + \beta a\}$$

Como βa é uma constante então:

$$= \max_{c,k_1,k_2,k'} \{u(c) + \beta v(k')\} + \beta a = v(k) + \beta a$$

Logo:

$$T(v+a)(k) = v(k) + \beta a$$

(c)

Para isso temos que relembrar alguns conceito de Stockey et al. (1989), para lá temos o Teorema 4.2 que nos diz que se X, Γ, F, β satisfazem:

- $\forall x \in X(\Gamma(x))$ é não vazio
- $\forall x_0 \in X$ e todo $\bar{x} \in \Pi(x_0)$ existe o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1})$$

Então $v = v^*$.

Queremos mostrar que se v é solução pro problema recursivo então v^* é solução do planejador central.

Para satisfazer as condições que temos devemos ter que:

- F é limitado
- $\beta \in (0,1)$

O primeiro ponto é simples porque u nossa função utilidade é limitada.
Condição de transversalidade:

$$\forall x_0 \in X \left[\forall (x_0, x_1, ..., x_n) \in \Pi(x_0) \left[\lim_{n\to\infty} \beta^n v(x_n) = 0\right]\right]$$