Monitoria Macro I - Parte 2

Yuri Passuelo

10 de Março de 2025

- Revisão Equações Diferenciais
- Calculo de Variações
  - Otimização dinâmica do Monopolista
  - Trade-off de Inflação e Desemprego
- Controle Ótimo
  - Trade-off Energia e Poluição
  - Modelo de Ramsey

Introdução

- Na primeira parte nosso foco foi estudar métodos para resolver modelos microeconômicos em tempo discreto, vimos:
  - Modelo de trocas
  - Modelo de crescimento neoclássico
  - Modelo de arvores de lucas
  - Programação Dinâmica e algoritmos para resolver esses problemas

Introdução

- Nessa segunda parte iremos continuar com esse objetivo de revisar métodos, porém nosso tempo será o tempo continuo:
  - Calculo de Variações
  - Controle ótimo

Introdução

Iniciaremos nossa revisão de Equações Diferenciais:

- Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem com coeficientes contantes
  - Solução homogênea
  - Solução particular
- Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem (com coeficientes constantes)
  - Casos da solução homogênea
- Método do Fator Integrante (Generalização de solução para uma E.D.O de primeira ordem com coeficientes não constantes)

Revisão Equações Diferenciais

Equação Diferencial Ordinaria:

$$y' + y = 0$$

Dividindo ambos os lados por y

$$\frac{y'}{y} + 1 = 0$$

Isolando a constante do lado direito

$$\frac{y'}{y} = -1$$

Integrando

$$\int \frac{y'}{y} dt = \int dt \implies \ln(y) + C_1 = -t + C_3$$

Aplicando o exponencial:

$$ye^{C_1} = e^{-t+C_3}$$

Isolando y:

$$y = e^{-t+C_3-C_1}$$

Supondo $C = e^{C_3-C_1}$

$$y = Ce^{-t}$$

Outra forma de resolver mais direta:
Supondo/chutando a equação característica $y = Ce^{rt}$ então:

$$rCe^{rt} + Ce^{rt} = 0$$

$$Ce^{rt}(r+1) = 0 \implies r = -1$$

Logo:

$$y(t) = Ce^{-t}$$

$$y' + y = 2$$

Para resolver a parte homogenia $y' + y$ o procedimento é o mesmo de chutar a função característica:

$$y_c(t) = Ce^{-rt}$$

Para resolver a solução particular supomos que $y_p(t) = B$, portanto:

$$y^p(t) = B$$

$$y_p'(t) = 0 \implies y_p(t) = B = 2$$

$$y(t) = Ce^{-rt} + 2$$

$$y' + y = 2t + 1$$

Da mesma forma nossa solução homogenea é a mesma, agora a particular provavelmente segue: $y_p(t) = At + B$

$$y_p(t) = At + B \implies y_p'(t) = A$$

$$At + (A + B) = 2t + 1$$

$$A = 2; B = -1$$

$$y(t) = Ce^{-rt} + 2t - 1$$

Revisão Equações Diferenciais

$$3y' - y = 3t^2 + 2t$$

Resolvendo a parte homogênea da forma direta

$$3rCe^{rt} - Ce^{rt} = 0 \implies Ce^{rt}(3r - 1) = 0 \implies r = 1/3$$

$$y_c(t) = Ce^{\frac{1}{3}t}$$

Para a solução particular vamos "Chutar" que $y_p(t) = At^2 + Bt + C$

$$y_p'(t) = 2At + B$$

Revisão Equações Diferenciais

$$2At^2 + 2(A+B)t + (2C+B) = 3t^2 + 2t$$

$$2A = 3 \implies A = 3/2$$

$$2A + 2B = 2 \implies B = -1/2$$

$$2C + B = 0 \implies C = 1/4$$

$$y(t) = Ce^{\frac{1}{3}t} + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$

$$y' - 2y = e^{3t}$$

Resolvendo a parte homogênea:

$$rCe^{rt} - 2Ce^{rt} = 0 \implies Ce^{rt}(r-2) = 0 \implies r = 2$$

$$y_c(t) = Ce^{2t}$$

Resolvendo a solução particular aqui nosso chute seria $y_p(t) = Ae^{Bt}$:

$$ABe^{Bt} - 2Be^{Bt} = B(A-2)e^{Bt} = e^{3t}$$

$$B = 3$$

$$B(A-2) = 1 \implies A = \frac{7}{3}$$

Portanto a solução geral é:

$$y(t) = Ce^{2t} + \frac{7}{3}e^{3t}$$

- E ordem mais altas?
- O processo para achar a solução característica é o mesmo, porém com detalhes maiores!
- Para achar as soluções particulares, nada muda.

Ao resolver uma equação de segundo grau temos três possibilidades:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta > 0 \implies \text{ Duas soluções } \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0 \implies \text{ Uma solução } \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta < 0 \implies \text{ Duas soluções } \frac{-b \pm \Delta i}{2a}$$

Exemplo:

$$y'' - 2y' = 0$$

Vamos a solução homogênea encontrando a equação característica:

$$y(t) = Ce^{rt} \implies y'(t) = rCe^{rt} \implies r^2Ce^{rt}$$

$$r^2Ce^{rt} - 2rCe^{rt} = 0 \implies Ce^{rt}(r^2 - 2r) \implies r = 2 \text{ ou } r = 0$$

Aqui temos duas soluções viáveis.

Como aqui temos duas soluções então nossa solução para esse problema serão todas as combinações lineares possíveis de ambas as soluções, representadas por:

$$C_1 + C_2 e^{2t}$$

Definição

Dada uma E.D.O de segundo grau no formato:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Se ao construir a equação característica contemplar duas soluções então sua solução geral será no formato:

$$C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Outro exemplo:

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$y(t) = Ce^{rt} \; ; \; y'(t) = rCe^{rt} \; ; \; y'(t) = r^2Ce^{rt}$$

$$Ce^{rt}(r^2 + 2r + 1) = 0$$

Por Bhaskara teremos:

$$\Delta = 4 - 4 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

Nesse caso temos apenas uma solução mesmo com EDO de segundo grau, assim nossa solução para essa EDO será:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

Definição

Dada uma E.D.O de segundo grau no formato

$$ay'' + by' + cy = d$$

Caso no procedimento de encontrar sua equação característica encontremos apenas uma solução ($\Delta = 0$), sua solução complementar será no formato:

$$y(t) = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$$

Revisão Equações Diferenciais

Suponhamos agora a seguinte EDO:

$$y'' + y' + y = 0$$

Resolvendo da forma usual teremos:

$$y = Ce^{rt} \; ; \; y' = rCe^{rt} \; ; \; y'' = r^2 Ce^{rt}$$

$$Ce^{rt}(r^2 + r + 1) = 0$$

Resolvendo por Bhaskara:

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \implies \frac{-1 + 3i}{2} \text{ e } \frac{-1 - 3i}{2}$$

Dado que temos duas soluções no plano complexo nossa solução característica /geral para esse problema será:

$$e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1\cos\left(\frac{3}{2}t\right)+C_2\sin\left(\frac{3}{2}t\right)\right)$$

Definição

Dada uma E.D.O no formato

$$ay'' + by' + cy = d$$

Caso no procedimento de encontrar sua equação característica encontremos $\Delta < 0$, sua solução característica será no formato:

$$y(t) = e^{\alpha i}\Big(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)\Big)$$

Aonde r é a solução da equação característica:

$$r = \alpha \pm \beta i$$

Método do Fator Integrante

- Para EDOs mais complicadas como por exemplo:

$$y' - 2ty = 0$$

- Pode ser um pouco complicada resolve-las, então adotamos uma formula "fechada" como alternativa, o chamado método do fator integrante.
- Aqui temos o um parâmetro variante no tempo que multiplica nossa função $y(t)$

Método do Fator Integrante

Definição

Dada uma E.D.O de primeiro grau no formato:

$$y(t)' + p(t)y(t) = q(t)$$

A solução fechada para $y(t)$ é:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\Big(\int \mu(t)q(t)dt + C\Big)$$

Com:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

Método do Fator Integrante

Pegando exemplo mostrado acima:

$$p(t) = 2t \ ; \ q(t) = 0$$

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int 2tdt} = e^{t^2}$$

Como $q(t) = 0$ então temos:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}C = Ce^{-t^2}$$

Vamos resolver outros problemas:

Método do Fator Integrante

$$y' + e^t y = 2t$$

Primeiro vamos decompor nossa E.D.O no formato $y' + p(t)y = q(t)$

$$p(t) = e^t$$

$$q(t) = 2t$$

$$\mu(t) = e^{\int e^t dt} = e^{e^t}$$

Portanto nossa solução pelo método do fator integrante será:

$$y(t) = e^{-e^t}\left(\int 2te^{e^t}dt + C\right)$$