Lista 4
Macroeconomia II

Yuri Passuelo – yuripassuelo@usp.br

September 16, 2025

Resolução dos exercícios da quarta lista da disciplinas de Macroeconomia II.

Labor search com demissão

Considere o modelo de mercado de trabalho em que um trabalhador desempregado procura um emprego a cada período. Quando o trabalhador está desempregado ele certamente recebe uma oferta de emprego que vem da distribuição f. Depois que o trabalhador aceita um emprego ele pode ser demitido. A demissão ocorre a cada período com uma probabilidade π.

(a) Escreva a função valor que representa o problema recursivo de um trabalhador.

(b) Suponha que exista uma massa unitária de trabalhadores idênticos nesta economia. Denote por U_t a massa de trabalhadores desempregados e E_t a massa de trabalhadores empregados. Escreva as equações que representam a dinâmica de movimentação de trabalhadores entre emprego e desemprego. Encontre os valores de estado estacionário de U_t e E_t.

(c) Suponha que a utilidade seja dada por $u(c) = \sqrt{c}$ e que a densidade dos salário seja uma função do tipo $f(w) = \alpha_1 + \alpha_2 w$. Além disso, considere que $\beta = 0.98$, $\pi = 0.1$, $b = 0.01$, $\bar{w} = 20$ e $f(0) = 2f(\bar{w})$. Resolva numericamente o modelo. Reporte e explique as funções valor e política.

(d) Considere agora que $2f(0) = f(\bar{w})$. Resolva novamente o modelo numericamente. Qual foi a principal mudança?

Solution

(a) Aqui temos uma situação um pouco distinta do que havíamos encontrado no caso base inicial, primeiramente temos que os indivíduos tem certeza que vão receber uma oferta de trabalho com salário w que provem de uma distribuição $\mathbb{W}$ que tem suporte em $[0, \bar{w}]$, aqui resta ao individuo decidir se deseja aceitar ou não a oferta de trabalho, caso aceite receberá quando empregado o seu salário w, mas incorre em um risco de demissão dado pela probabilidade π, e caso rejeite recebe um beneficio de seguro desemprego no valor de b.

$$V^e(w) = u(w) + \beta[(1-\pi)V^e(w) + \pi\mathbb{E}_{w'}[V^u(w')]]$$

$$V^u(w) = \max\{V^e(w), u(b) + \beta\mathbb{E}_{w'}[V^u(w)]\}$$

Aqui detonamos $\mathbb{E}_{w'}[V^u(w')] = \int_W V^u(w)df(w')$

Como vimos acima temos duas funções valores, a primeira descreve a função valor para um individuo previamente empregado, e a segunda descreve para um individuo previamente desempregado, podemos substituir a equação (1) na equação (2) de modo que:

$$V^u(w) = \max\{u(w) + \beta[(1-\pi)V^e(w) + \pi\mathbb{E}_{w'}[V^u(w')]], u(b) + \beta\mathbb{E}_{w'}[V^u(w)]\}$$

Aqui temos a decisão do individuo entre aceitar ou não a oferta de trabalho. Podemos trabalhar a equação (1) de modo que isolemos $V^e(w)$:

$$V^e(w) = u(w) + \beta[(1-\pi)V^e(w) + \pi\mathbb{E}_{w'}[V^u(w')]]$$

$$V^e(w)(1-\beta(1-\pi)) = u(w) + \beta\pi\mathbb{E}_{w'}[V^u(w')]$$

Logo:

$$V^e(w) = \frac{u(w) + \beta\pi\mathbb{E}_{w'}[V^u(w')]}{1-\beta(1-\pi)}$$

Assim $V^u(w)$ é:

$$V^u(w) = \max\{\frac{u(w) + \beta\pi\mathbb{E}_{w'}[V^u(w')]}{1-\beta(1-\pi)}, u(b) + \beta\mathbb{E}_{w'}[V^u(w)]\}$$

Assim como no caso sem demissão aqui teremos que a decisão será baseada em:

$$\boxed{V^u(w) = \begin{cases} \frac{u(w)+\beta\pi\mathbb{E}_{w'}[V^u(w')]}{1-\beta(1-\pi)} \text{ , Se } w \geq \bar{w} \\ u(b) + \beta\mathbb{E}_{w'}[V^u(w)] \text{ , Se } w \leq \bar{w} \end{cases}}$$

Aqui $\bar{w}$ será denotado como salário de reserva, aonde sua determinação será dada por:

$$\frac{u(w) + \beta\pi \int_W V^u(w)df(w')}{1 - \beta(1-\pi)} = u(b) + \beta \int_W V^u(w)df(w')$$

Sobre algumas hipóteses a respeito da distribuição f e sua respectiva função cumulativa F e da função de utilidade u temos que $\bar{w}$ será único.

(b) Dados E_t e U_t Massas de trabalhadores empregados e desempregados, e α a chamada *finding rate*, ou taxa de aceitação de trabalho, a dinâmica de movimento é dada pelas seguintes equações:

$$U_t = \pi E_{t-1} + (1-\alpha)U_{t-1}$$

$$E_t = (1-\pi)E_{t-1} + \alpha U_{t-1}$$

Como nossa massa de indivíduos é unitária temos que:

$$U_t + E_t = N_t = 1$$

As dinâmicas da equação a respeito de U_t nos mostram que a massa de trabalhadores desempregadas em t corresponde a proporção da massa de trabalhadores desempregados que não aceitaram as propostas de emprego em $t-1$ mais a proporção de trabalhadores empregados que perderam seus empregos em $t-1$. Já a massa de trabalhadores empregados em t corresponde a proporção de empregados em $t-1$ que não perderam seus empregos mais a taxa de desempregados que não aceitaram ofertas de trabalho em U_{t-1}. Em forma matricial temos:

$$\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X_{t-1}}$$

Aonde:

$$\boldsymbol{X_t} = \begin{bmatrix} U_t \\ E_t \end{bmatrix}, \boldsymbol{X_{t-1}} = \begin{bmatrix} U_{t-1} \\ E_{t-1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \pi & 1-\pi \\ 1-\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

A solução do *steady state* implica em um vetor $\bar{X}$ tal que:

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{X}}$$

Como $E_t \in (0,1)$, $U_t \in (0,1)$, $E_t + U_t = 1$, $\alpha \in (0,1)$ e $\pi \in (0,1)$ e $\boldsymbol{A}$ uma matriz de Markov, então teremos que em equilíbrio (*Steady state*) temos $E_t = E_{t-1} = E$ e $U_t = U_{t-1} = U$ logo:

$$U = \pi E + (1-\alpha)U$$

$$E = (1-\pi)E + \alpha U$$

Isolando U e E em cada equação:

$$\alpha U = \pi E$$

$$\pi E = \alpha U$$

Portanto $U = \frac{\pi}{\alpha}E$ substituindo na soma de $E + U = 1$

$$\boxed{\frac{\pi}{\alpha}E + E = 1 \implies E = \frac{\alpha}{\pi + \alpha}}$$

$$\boxed{U = \frac{\pi}{\pi + \alpha}}$$

(c) Resolução Numérica:

Antes de iniciar vamos primeiro nos atentar a função densidade dos salários dada por:

$$f(w) = \alpha_1 + \alpha_2 w$$

Como temos as restrições:

$$\bar{w} = 20$$

$$f(0) = 2f(20)$$

Logo:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 40 = \alpha_1$$

E $f(w)$ se trata de uma função densidade temos que:

$$\int_0^{20} \alpha_1 + \alpha_2 w dw = 1$$

Resolvendo a integral, chegamos a uma equação:

$$\int_0^{20} \alpha_1 + \alpha_2 w dw = [\alpha_1 w + \frac{\alpha_2 w^2}{2}]\Big|_0^{20} = 20\alpha_1 + 200\alpha_2 = 1$$

Usando a equação proveniente da integral e a restrição acima podemos montar um sistema de equações de modo que possamos encontrar α_1 e α_2

$$\alpha_1 + 40\alpha_2 = 0$$

$$20\alpha_1 + 200\alpha_2 = 1$$

Multiplicando a primeira equação por -20 temos o sistema:

$$-20\alpha_1 - 800\alpha_2 = 0$$

$$20\alpha_1 + 200\alpha_2 = 1$$

Somando as equações temos:

$$-600\alpha_2 = 1 \implies \alpha_2 = -\frac{1}{600}$$

Com base em α_2 vamos calcular α_1:

$$\alpha_1 = -40\alpha_2 = \frac{40}{600} = \frac{2}{30}$$

Portanto nossa função densidade é:

$$\boxed{f(w) = \frac{2}{30} - \frac{1}{600}w}$$

Com base nessa densidade podemos tentar resolver o modelo com base no problema recursivo a seguir:

$$V^u(w) = \begin{cases} \frac{u(w)+\beta\pi E_{w'}[V^u(w')]}{1-\beta(1-\pi)} \text{ , Se } w \geq \bar{w} \\ u(b) + \beta E_{w'}[V^u(w)] \text{ , Se } w \leq \bar{w} \end{cases}$$

E aplicamos o algoritmo padrão, abaixo seguem os resultados e o *script* em `Python` que resolve o problema:

(d) Considerando agora a restrição $2f(0) = f(\bar{w})$, basta resolver as constantes da densidade do mesmo modo acima construindo um sistema de equações.

$$2f(0) = f(20) \implies 2\alpha_1 = \alpha_1 + 20\alpha_2$$

Combinando com $20\alpha_1 + 200\alpha_2 = 1$:

$$\alpha_1 + 20\alpha_2 = 2\alpha_2$$

$$20\alpha_1 + 200\alpha_2 = 1$$

Com:

$$-\alpha_1 + 20\alpha_2 = 0$$

$$20\alpha_1 + 200\alpha_2 = 1$$

Multiplicando a primeira equação por 20 e somando com a segunda equação temos:

$$600\alpha_2 = 1 \implies \alpha_2 = \frac{1}{600}$$

Substituindo α_2 em $-\alpha_1 + 20\alpha_2 = 0$ vamos encontrar α_1

$$-\alpha_1 + \frac{20}{600} = 0 \implies \alpha = \frac{1}{30}$$

Temos por fim a função densidade:

$$f(w) = \frac{1}{30} + \frac{1}{600}w$$

Essa alteração nas restrições altera o formado da nossa função densidade:

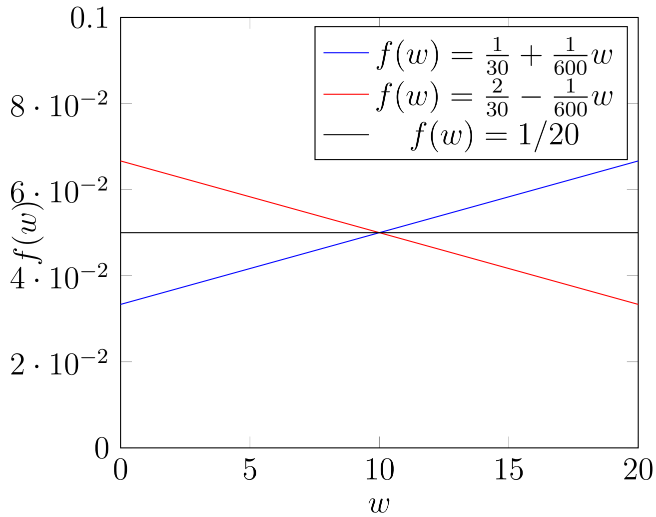
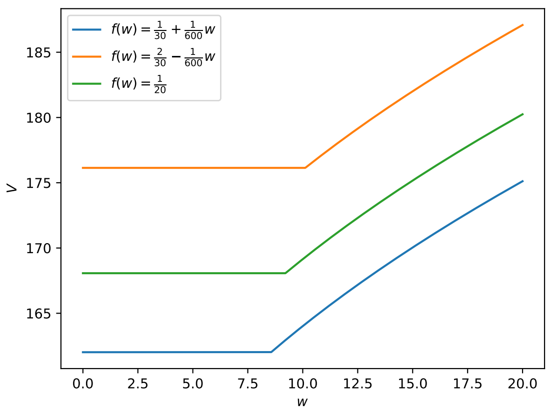


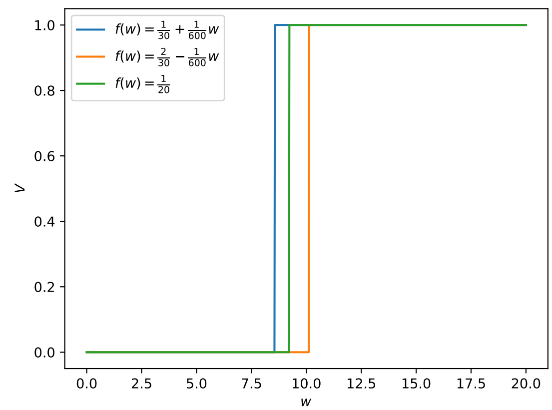
Figure 1: Funções densidades

De modo que como o primeiro caso observávamos a massa de salários se concentrava mais a esquerda do ponto do meio entre o suporte $[0, 20]$, enquanto no segundo caso fica mais a direita, isso significa que há maior probabilidade do individuo receber propostas com salários maiores, o efeito indireto que esperamos ocorrer é justamente um aumento do salario de reserva.

No site da monitoria estão disponíveis os *scripts* em `MATLAB` e `Python`



(a) Função Valor



(d) Função Politica

Figure 2: Funções Valor e Política associadas

No painel acima mostramos as funções valores para os diferentes tipos de densidade. Como havíamos previsto ao mudar a função levamos a um bem estar maior gerado pela função política e também um maior salario de reserva.

$f(w)$	$\bar{w}$
$f(w) = \frac{2}{30} - \frac{1}{600}w$	8.5865
$f(w) = \frac{1}{20}$	9.2292
$f(w) = \frac{1}{30} + \frac{1}{600}w$	10.1301

Table 1: Resumo salários de reserva

Labor search e acumulação de capital

Apresente uma versão numérica do modelo em que as pessoas podem acumular capital.

Solution

Apesar de um pouco incerto como podemos acumular capital vamos mostrar uma versão do modelo com demissão mas com acumulação de capital, nesse caso teremos que alterar a restrição que seremos sujeitos em dois diferentes casos:

1. Quando empregados:

$$c + a' \leq (1 + r)a + w$$

$$a' > 0$$

2. Quando desempregados:

$$c + a' \leq (1 + r)a + b$$

$$a' > 0$$

A partir das restrições teremos assim como anteriormente duas funções valores, uma para quando empregados e outra para quando desempregados:

$$V^e(w, a) = u((1 + r)a + w - a') + \beta[(1 - \pi)V^e(w, a') + \pi\mathbb{E}_{w'}[V^u(w', a')]]$$

$$V^u(w, a) = \max \{V^e(w, a), u((1 + r)a + b - a') + \beta\mathbb{E}'_w[V^u(w', a')]\}$$

Pegando a função valor do empregado e substituindo na função valor do do desempregado teremos

$$V^u(w, a) = \begin{cases} u((1 + r)a + w - a') + \beta[(1 - \pi)V^e(w, a') + \pi\mathbb{E}_{w'}[V^u(w', a')]] & \text{Se } w^* \geq w \\ u((1 + r)a + b - a') + \beta\mathbb{E}'_w[V^u(w, a)] & \text{Se } w^* \leq w \end{cases}$$

Determinação do salário de reserva w^* ocorre quando:

$$u((1+r)a+w-a')+\beta[(1-\pi)V^e(w, a')+\pi\mathbb{E}_{w'}[V^u(w', a')]] = u((1+r)a+b-a')+\beta\mathbb{E}'_w[V^u(w, a)]$$

Note que aqui não existe meio de por exemplo isolar $V^e(w, a)$, pois a função valor do empregado é recursiva e depende de uma variável de estado que é w, que no caso é constante caso o individuo permanecer empregado, mas também depende de uma variável de escolha a', ou seja, de quanto o individuo deve poupar para o próximo período. Portanto com há essa dependência não é possível simplificar essa expressão.

$$w \sim U[0, \bar{w}] \text{ p/ } \bar{w} > 0$$

O código que tenta resolver numericamente está disponível no site da monitoria, exclusivamente em Python.